相対性理論

第 1 部　特殊相対性理論

第 2 部　一般相対性理論

第 1 部　特殊相対性理論

はじめに

すべての慣性座標系は、同等であるという相対性の原理によれば、物理法則はどの座標系においてもおなじ形に書かれなくてはならない。ところが、座標のガリレイ変換のもとで、ニュートンの方程式は相対性の原理をみたしているが、マックスウェルの方程式は相対性の原理をみたさない。ローレンツは、このマクスウェル方程式間の換算方式を算出してローレンツ変換にたどりついた。

ところが、アインシュタインのアプローチはかなり異なる。「光速度が慣性系によらず一定」（当時のマイケルソン - モーレイの実験結果）をそのまま認め、理論の根本的な要請と置いたことである。

アインシュタインが採用したのは、次の２つの原理である。

①相対性原理　すべての慣性系において物理法則は同じ形に表現される。

②光速度不変の原理

①相対性原理と②相互作用の伝播速度の有限性を結びつけたものは、相互作用の伝播速度が無限大であるという前提にたつガリレイの相対性原理と区別して、アインシュタインの相対性原理と呼ばれる。相対性原理からすれば、相互作用の伝播速度もすべての慣性基準系において同一でなければならない。この一定の速度は真空中を光が伝わる速度でもある。

古典力学では、場は、粒子の相互作用という物理現象を記述する一つの様式でしかなかった。相対性理論では、相互作用の伝播速度が有限であることのために事態は根本的に一変する。１個の粒子の位置の変化の影響が他の粒子におよぶのは、ある長さの時間が経過してのちである。このことは、場それ自体が物理的実存性を獲得することを意味している。

「同時性」概念にも大きな変革がもたらされる。ガリレイの相対性原理で「同一場所」という概念が定まった基準系を選択したあとにのみ意味をもつのと同様に、「同時性」という概念もある基準系を選んだのちにおいてのみ意味をもつことになったのである。すなわち、ある基準系では同時であっても別の基準系ではもはや同時ではない。

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$　として

ある基準系で速さが v で動いているものは、基準系からみて

長さ $1/\gamma$ 倍（短く）、時間の進み具合 γ 倍（ゆっくり）、重さ γ 倍（重く）になる。

$l = l_0/\gamma$　　$\tau = \gamma\tau_0$　　$m = \gamma m_0$

運動量保存の法則を否定して、かわりに質量が速度に依存しないと考えることもできるが、それは、力学をもっと混乱した記述にしなければならなくなる。

そこで、運動量保存の法則を維持し、質量の速度変化を認める。質量の速度依存性は、ニュートン力学と相対論的力学を区別する本質的な相違である。

基準系を変えると、空間 - 時間グラフの層は互いに混合する。その意味では、相対性理論は空間関係と時間関係のあいだの独立性を除く。だが、相対性理論が空間の４つの変数を発見したというのは正しくない。あくまで、時間と空間は同等ではない。この二つは本質的に物質の存在の異なる形態なのである。事象の時刻は拡張された４番目の座標であるが、けっして第４番目の空間座標ではない。時間と空間を同等なものとするのではなく、４次元空間・時間多様体の特別な「幾何学」を使って、その性質を統一的に研究することがこの相対性理論の基本的傾向である。

準備（反変ベクトル・共変ベクトル、計量）

記述について　http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/CovariantContravariant/

座標系の基底として $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ のように添字が右下につくタイプのものと、$\{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ のように添字が右上につくタイプのものが両方でてくる。どちらを使っても良いのだが,『ベクトルの成分につく添字は、基底についている添字と上下を逆にする』と約束しておく。

例えば、

$\mathbf{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ または $\mathbf{A} = A_1\boldsymbol{e}^1 + A_2\boldsymbol{e}^2 + A_3\boldsymbol{e}^3$

アインシュタインの縮約記法

添字について上下に同じものがあれば、次元数に応じた和をとるものとする。こう約束しておけば、記述がだいぶん簡単になる。

$a^ib_i = a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3$（4 次元では $a^ib_i = a^0b_0 + a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3$）

$a^i{}_kb_i = a^1{}_kb_1 + a^2{}_kb_2 + a^3{}_kb_3$（4 次元では $a^i{}_kb_i = a^0{}_kb_0 + a^1{}_kb_1 + a^2{}_kb_2 + a^3{}_kb_3$）等々

座標変換

基底ベクトルの座標変換は、最初の座標の基底ベクトルを $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$、新しい座標の基底ベクトルを $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ として、次のように書ける。

$\boldsymbol{e}'_i = p_i{}^1\boldsymbol{e}_1 + p_i{}^2\boldsymbol{e}_2 + p_i{}^3\boldsymbol{e}_3 = p_i{}^k\boldsymbol{e}_k$　← 添字が上下で同じものは次元数に応じた和をとることとする（アインシュタインの縮約記法）

$\boldsymbol{e}' = P\boldsymbol{e}$　特に、ベクトル空間の基底が正規直交系である場合は，P は直交行列となる。$P^t = P^{-1}$

反変ベクトル

反変ベクトルの例として、位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ （他にも速度、運動量、加速度など多数あげられる）

$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3 = x'^1\boldsymbol{e}'_1 + x'^2\boldsymbol{e}'_2 + x'^3\boldsymbol{e}'_3$　が成り立つ。

この右辺に上で書いた $\boldsymbol{e}'_i$ を代入して $\boldsymbol{e}_i$ について整理すると、

$x^i = p_1{}^ix'^1 + p_2{}^ix'^2 + p_3{}^ix'^3 = p_k{}^ix'^k$　を得る（p の添え字 ik が入れ替わっている)。

$\boldsymbol{x} = P^t\boldsymbol{x}'$

$\boldsymbol{x}' = (P^t)^{-1}\boldsymbol{x}$　（反変ベクトル変換）　　$\boldsymbol{x}' = Q\boldsymbol{x}$ としたら $P = (Q^t)^{-1}$

（基底ベクトルを明示的に表わすと，$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3$ となる。この表記の場合、基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の添字は下付のままでよい。）

共変ベクトル

一方、基底ベクトルの座標変換で、次のように基底ベクトルと同一の変換式に従うベクトル $\boldsymbol{y}$ を共変ベクトルと呼ぶ。

$y'_i = p_i{}^1y_1 + p_i{}^2y_2 + p_i{}^3y_3 = p_i{}^ky_k$

$\boldsymbol{y}' = P\boldsymbol{y}$　（共変ベクトル変換）

共変ベクトルの例としては、スカラー量を座標で偏微分して作られているベクトル。例えば、電場、電場はスカラー量の電位を座標で偏微分したものである。

（基底ベクトルを明示的に書くと、最初に決めた添字を上下に分けるというルールにより、$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}^1 + y_2\boldsymbol{e}^2 + y_3\boldsymbol{e}^3$ となる。この表記の場合、基底ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ の添字は上付になる。）

共変ベクトルと反変ベクトルは互いに内積を取ると座標変換ルールが打ち消しあって、座標の取り方によらない量（スカラー）になる。こういう関係を「双対（dual)」という。

$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x}'^t\boldsymbol{y}' = ((P^t)^{-1}\boldsymbol{x})^tP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^tP^{-1}P\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

正規直交基底では、共変ベクトルと反変ベクトルは同じような変換となる。

$\boldsymbol{x}' = (P^t)^{-1}\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}$　（反変ベクトル変換）

$\boldsymbol{y}' = P\boldsymbol{y}$　（共変ベクトル変換）

次のような定義のほうがわかりやすいかもしれない。（page5 参照）

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial y'} \\ \frac{\partial x}{\partial z'} & \frac{\partial y}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{pmatrix}$$

反変ベクトル　$\boldsymbol{a}' = A\,\boldsymbol{a}$　　$a'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k}\, a^k$

共変ベクトル　$\boldsymbol{b}' = B\,\boldsymbol{b}$　　$b'_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i}\, b_k$

$A^t = B^{-1}$

反変ベクトルと共変ベクトルの内積を取った量はスカラーになる。

$\boldsymbol{a}'^t\,\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}^t\,\boldsymbol{b}$

反変ベクトルの例　位置の微小変化を表すベクトル (dx, dy, dz)

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\, dx^k$$

共変ベクトルの例　微分演算子のベクトル $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial x}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z}$$

ϕ をスカラーとすると、$\dfrac{\partial \phi}{\partial x^i}$ は共変ベクトルになる。

計量（メトリック）

無限小線素 ds^2（微小距離）が次のように表せる時、g_{ij} を計量と呼ぶ。

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$

計量は 2 階の共変テンソルの変換則に従う。

ds^2 はスカラー。一方、微小変位 dx^i、dx^j は反変ベクトル。よって g_{ij} は共変テンソルである。

計量の成分は、

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\, g_{kl}$$

のような変換を受ける。

計量テンソルは反変ベクトルを共変ベクトルに変換する。

$A_i = g_{ij} A^j$

逆に、g_{ij} の逆行列 g^{ij}（反変テンソル）は、共変ベクトルを反変ベクトルに変換する。

$g^{ij} A_i = A^j$

ミンコフスキー計量 $\mathcal{G}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

ローレンツ変換

ローレンツ変換は、ローレンツ式の「マクスウェル方程式を不変に保つ」変換方法から考えるよりも、「光速度が慣性系によらず一定」であるという要請から導くほうがよほど簡単である。

静止系 (x, y, z, t) とそれに対して x 軸方向へ速度 v で運動している系 (x', y', z', t') を考える。
同じ物差し l_0 を x 軸上に用意し、互いにどのように見えているか考えてみる。見え方は同等＝相対性がなりたつ。
その変化を
$l = \gamma l_0$ とする。（物差しが倍の長さになれば、見え方も比例して倍になるはず。）

さて、原点から放出された光は、不変速度 c で、x 軸方向に関していえば、

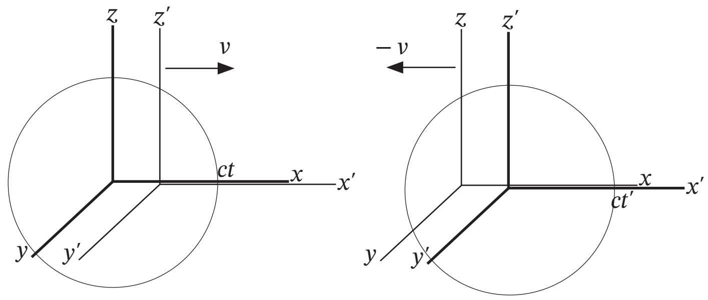
$x = ct$　　左図
$x' = ct'$　　右図

のように広がっていく。
一方、光の到達している地点は、

$x' = \gamma(x - vt)$　　左図
$x = \gamma(x' + vt')$　　右図

の関係が成り立つ。
したがって、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = v/c$$



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

座標系によって時間が異なること、時間と空間が混じり合うことなどがわかる。
$c \to \infty$ とすると、ガリレイ変換となる。
動いている物差しは短く（$1/\gamma$ 倍）、時計はゆっくり（γ 倍）、重さは重くなって（γ 倍）見える。（質量の変化に関しては、page7「相対論的力学」参照）

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ミンコフスキー（Minkowski）時空

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

慣性座標系間の変換（$\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}'$ へ）として
ローレンツ変換　$L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$　→（原点は一致している）
L の要素　　純粋なローレンツ変換　L_α　エルミート行列　（$\mathcal{S}$ に対して $\boldsymbol{\alpha}$ 方向へ一定速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている $\mathcal{S}'$）
　　空間の回転 R　ユニタリ行列
　　時間と空間のそれぞれの反転　$\pm\mathcal{G}$　　$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

ローレンツ変換では、
$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$ が成り立つ。　←光速は変わらない

つまり、$\boldsymbol{x}^t\mathscr{G}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'^t\mathscr{G}\boldsymbol{x}'$　　$\mathscr{G}$ は計量テンソル　　$\mathscr{G} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$　　$\mathscr{G} = \mathscr{G}^{-1}$

$$= (L\boldsymbol{x})^t\mathscr{G}(L\boldsymbol{x})$$
$$= \boldsymbol{x}^t L^t \mathscr{G} L\boldsymbol{x}$$

$\mathscr{G} = L^t\mathscr{G}L \quad \rightarrow \quad |L| = \pm 1$

ローレンツ群

$\mathscr{G} = L^\dagger\mathscr{G}L$ を満足する L の集合 $\mathscr{L}$ をローレンツ群という。$L^\dagger$ は L の随伴行列 (L の転置およびその成分の複素共軛 L^{t*})

一般に $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$

同一方向の純粋なローレンツ変換は、群 $\mathscr{L}_\alpha$（$\mathscr{L}$ の部分群）をつくるが、$\mathscr{L}_\alpha$ は可換群である。

反変ベクトル $\boldsymbol{a}$（添字は上 a^i）　$\mathscr{S}$ で $\boldsymbol{a}$、$\mathscr{S}'$ で $\boldsymbol{a}'$ のとき、$\boldsymbol{a}' = L\boldsymbol{a}$ がなりたつ。

共変ベクトル $\boldsymbol{b}$（添字は下 b_i）　$\mathscr{S}$ で $\boldsymbol{b}$、$\mathscr{S}'$ で $\boldsymbol{b}'$ のとき、$\boldsymbol{b}' = \widetilde{L}\,\boldsymbol{b}$ がなりたつ。

（page2　$P = (Q^t)^{-1}$ 参照）　$\widetilde{L} = (L^\dagger)^{-1} = \mathscr{G}L\mathscr{G}^{-1} \quad \leftarrow \quad \mathscr{G} = L^\dagger\mathscr{G}L$ より $(L^\dagger)^{-1} = \mathscr{G}L\mathscr{G}^{-1}$

純粋なローレンツ変換（$L^\dagger = L$）の場合は、$\widetilde{L} = L^{-1}$

反変テンソル T（T^{ij}）　$\mathscr{S}$ で T、$\mathscr{S}'$ で T′のとき、$\mathrm{T}' = L\,\mathrm{T}\,L^\dagger$ がなりたつ。

共変テンソル U（U_{ij}）　$\mathscr{S}$ で U、$\mathscr{S}'$ で U′のとき、$\mathrm{U}' = \widetilde{L}\,\mathrm{U}\,\widetilde{L}^\dagger$ がなりたつ。

混合テンソル V（$V^i{}_j$ あるいは $V_i{}^j$）　$\mathscr{S}$ で V、$\mathscr{S}'$ で V′のとき、$\mathrm{V}' = L\,\mathrm{V}\,\widetilde{L}^\dagger$ あるいは $\mathrm{V}' = \widetilde{L}\,\mathrm{V}\,L^\dagger$ がなりたつ。

これらのテンソルは、反変ベクトルや共変ベクトルを組み合わせてつくることができる。

$T^{ij} = A^i B^j$

$U_{ij} = A_i B_j$

$V^i{}_j = A^i B_j$

共変ベクトルと反変ベクトルは互いに内積を取ると、座標の取り方によらない量（スカラー）になる。

$\boldsymbol{a}'^\dagger\boldsymbol{b}' = (L\boldsymbol{a})^\dagger\mathscr{G}L\mathscr{G}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\dagger L^\dagger\mathscr{G}L\mathscr{G}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\dagger\mathscr{G}\mathscr{G}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{b}$

スカラー量を偏微分して作られるベクトルは、共変ベクトルとなる。

$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x} \quad \rightarrow \quad d\boldsymbol{x}' = Ld\boldsymbol{x}$　より　$L = \begin{pmatrix} \partial x'^0/\partial x^0 & \partial x'^0/\partial x^1 & \partial x'^0/\partial x^2 & \partial x'^0/\partial x^3 \\ \partial x'^1/\partial x^0 & \partial x'^1/\partial x^1 & \partial x'^1/\partial x^2 & \partial x'^1/\partial x^3 \\ \partial x'^2/\partial x^0 & \partial x'^2/\partial x^1 & \partial x'^2/\partial x^2 & \partial x'^2/\partial x^3 \\ \partial x'^3/\partial x^0 & \partial x'^3/\partial x^1 & \partial x'^3/\partial x^2 & \partial x'^3/\partial x^3 \end{pmatrix}$

$d\boldsymbol{x}' = Ld\boldsymbol{x}$ を入れ替えてみると、$d\boldsymbol{x} = L^{-1}d\boldsymbol{x}' = ((L^\dagger)^{-1})^\dagger d\boldsymbol{x}' = \widetilde{L}^\dagger d\boldsymbol{x}'$

これより、

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} \partial x^0/\partial x'^0 & \partial x^1/\partial x'^0 & \partial x^2/\partial x'^0 & \partial x^3/\partial x'^0 \\ \partial x^0/\partial x'^1 & \partial x^1/\partial x'^1 & \partial x^2/\partial x'^1 & \partial x^3/\partial x'^1 \\ \partial x^0/\partial x'^2 & \partial x^1/\partial x'^2 & \partial x^2/\partial x'^2 & \partial x^3/\partial x'^2 \\ \partial x^0/\partial x'^3 & \partial x^1/\partial x'^3 & \partial x^2/\partial x'^3 & \partial x^3/\partial x'^3 \end{pmatrix}$$

反変ベクトル　$A'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k$

共変ベクトル　$A'_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k$

参考

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger \quad |A^\dagger| = |A|^*$　　$A^\dagger$ は行列 A の随伴行列 (A の転置およびその成分の複素共軛　A^{t*})

エルミート行列　$H^\dagger = H$

ユニタリ行列　$U^{-1} = U^\dagger$

直交行列　$A^t A = I$　直交座標軸の間の変換をあらわす行列は直交行列である。

行列式の公式をついでに列挙

$|AB| = |A||B|$

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$|A^t| = |A|$

$|\bar{A}| = \overline{|A|}$

$|A^\dagger| = |A|^*$

直交行列　A

$|A| = \pm 1$

ユニタリ行列　U

$|U| = 1$

正方行列 A が可逆である（逆行列が存在する）ことの必要十分条件は、$|A| \neq 0$ である。

相対論的力学

固有時

固有時とは、注目する物体に伴って移動する座標系で計測した時間のことである。一般に記号は τ を用いる。
$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$（c: 光速、t: 観測者にとっての時間、(x, y, z): 観測者にとっての物体の空間座標）はローレンツ変換に関して不変な量である（つまりいかなる座標系で物体を観測してもこの値は同じになる）。
そこで、$d(c\tau)^2 = d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ として $\tau = \int d\tau$ と τ を定義すると、この τ も不変量となる。この τ が固有時である。
恒等的に $(x, y, z) = 0$ である時、当然 $\tau = t$ である。常に $(x, y, z) = 0$ が成立するということは、それは観測対象の物体と共に移動する座標系で対象を観測していることに他ならない。これが τ が固有時と呼ばれる所以である。つまり、固有時とは物体固有の時間という意味である。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

不変量

$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

$(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cd\tau)^2$

両辺を $(d\tau)^2$ で割ると、

$$(c\frac{dt}{d\tau})^2 - (\frac{dx}{d\tau})^2 - (\frac{dy}{d\tau})^2 - (\frac{dz}{d\tau})^2 = c^2 \qquad ※$$

$(dt)^2$ で割ると、

$$c^2 - (\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt})^2 - (\frac{dz}{dt})^2 = (c\frac{d\tau}{dt})^2$$

つまり、$1 - (\frac{v}{c})^2 = (\frac{d\tau}{dt})^2$　　dt たっても $d\tau$ しか進まない

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$　とすると（ローレンツ係数）、

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

４元速度

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} cdt/d\tau \\ dx/d\tau \\ dy/d\tau \\ dz/d\tau \end{pmatrix} \qquad \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{dt} = \gamma\frac{dx}{dt} \quad \text{なので} \quad \boldsymbol{u} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}^t \mathcal{G}\, \boldsymbol{u} = (c\frac{dt}{d\tau})^2 - (\frac{dx}{d\tau})^2 - (\frac{dy}{d\tau})^2 - (\frac{dz}{d\tau})^2 = c^2 \qquad ※\text{より}$$

４元運動量

$\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{u}$　　m_0 は静止質量

$m = \gamma\, m_0$ と置くと、$\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{u} = m\begin{pmatrix} c \\ {}^{(3)}\boldsymbol{v} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^t \mathcal{G}\, \boldsymbol{p} &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= m_0{}^2 \boldsymbol{u}^t \mathcal{G}\, \boldsymbol{u} = (m_0 c)^2 \qquad \text{不変}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}$$

$E = mc^2$　について

４元運動量の時間成分 p^0 に c を掛けたものをテイラー展開すると、

$$cp^0 = m_0c^2\frac{dt}{d\tau} = \frac{m_0c^2}{d\tau/dt} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} + \cdots\cdots\cdots$$

第二項はニュートン力学における運動エネルギーであるので cp^0 はエネルギーに相当していると考えられる。

従って第一項の m_0c^2 もエネルギーを表していると解釈できる。この値は質点が例え慣性系に対して静止していて $v = 0$ であっても持つエネルギーであることから、この値を質点の静止質量エネルギーと呼ぶ。

$$cp^0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2 = E \quad （全エネルギー）$$

質量欠損や核反応・対消滅から、質量を持つ物質は mc^2 のエネルギーを持つことが確かめられている。

エネルギーと質量の等価法則ともいえる。

質量がエネルギーに、またその逆に変わるというのは、正確な表現ではない。

マクスウェルの方程式

マクスウェルの方程式においては、光速度が全ての観測者に対して不変であるという奇妙な予測のために、またそれがニュートン力学の運動法則と矛盾したために、当初、マクスウェルの方程式は電磁場への近似的なものに過ぎないと考えたられた。しかし、1905 年にアインシュタインが特殊相対性理論を提出したことによって、マクスウェルの方程式が正確で、ニュートン力学の方を修正すべきだったことが明確になった。これら電磁場の方程式は、特殊相対性理論と密接な関係にあり、ローレンツ変換に対する不変性（共変性）を満たしている。　https://ja.wikipedia.org/wiki/ マクスウェルの方程式

$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{H}$ は磁場、$\boldsymbol{D}$ は電束密度、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{i}$ は電流密度、ρ は電荷密度、t は時間

$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$　　(1)

$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \partial\boldsymbol{D}/\partial t$　　(2)

$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$　　(3)

$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$　　(4)

(1) 式は電磁誘導の法則、(2) 式は電流のつくる磁場に関するアンペールの法則を変位電流 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ を加えて一般化したもの。この 2 つの式で電場と磁場が関係づけられ、これにクーロンの法則に由来する (3)、(4) 式が補足されている。(3)、(4) 式はもともと定常状態で導かれたものであるが、非定常状態においても成り立つと考えられた。等方性の媒質中では、誘電率を ε、透磁率を μ とすれば、$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ である。(2) 式で変位電流 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ をつけ加えたのは電荷の保存についての連続の式 $\nabla\cdot\boldsymbol{i} = -\partial\rho/\partial t$ を考慮したからである。変位電流を導入したことによりマクスウェルはこの基礎方程式から電磁波の存在を理論的に予言したが，これは数年後 H.R. ヘルツにより実験的に証明された。

$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = div\,\boldsymbol{D} = \partial D_x/\partial x + \partial D_y/\partial y + \partial D_z/\partial z$

$\nabla\times\boldsymbol{E} = rot\,\boldsymbol{E}$　　$(rot\,\boldsymbol{E})_x = \partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z$　　$(rot\,\boldsymbol{E})_y = \partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x$　　$(rot\,\boldsymbol{E})_z = \partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y$

$\nabla\phi = grad\,\phi = (\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$　　ϕ はスカラー

$\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$

電磁波

電荷も電流もない空間を考えるから、

$\rho = 0$、$\boldsymbol{i} = 0$ である。さらに、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ という関係がある。

したがって、マックスウェルの方程式は、次のような $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ のみに関する式になる。

$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0\partial\boldsymbol{H}/\partial t$

$\nabla\times\boldsymbol{H} = \varepsilon_0\partial\boldsymbol{E}/\partial t$

$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$

$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$

電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と ϕ の導入

$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ という関係を想定すると、マクスウェルの方程式の一つである (4) の $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ は自動的に満たされることになる。$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{X}$ という形の式は必ず 0 になるからである。

またこれを (1) 式に代入すると、$\nabla\times(\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{A}/\partial t) = 0$ となる。カッコのなかは回転をとってゼロとなるので、ベクトル解析よりスカラー場 ϕ の勾配としてあらわすことができる。

したがって、$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ と表すことで (1) も満たされることになる。($-\nabla\phi$ のマイナスは静的な場合 ϕ が電位と一致するようにしたもの。)

電場の強度と磁束密度からスカラーポテンシャル ϕ、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入したが、ϕ、$\boldsymbol{A}$ ありきで始めると、上の式 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ は電場の強度と磁束密度の「定義式」とみなす事もできる。

電磁場は電磁ポテンシャルの一階の微分方程式で定義される為、電磁ポテンシャルには不定性が生じる。この不定性によりポテンシャルを変化させる操作はゲージ変換と呼ばれる。

電磁場をラグランジュ形式で記述する時、ラグランジアンは電磁場ではなく電磁ポテンシャルを用いてかかれるため、電磁ポテンシャルはより基本的な概念として扱われる。

古典電磁気学では、観測にかかる本質的な物理量は電場や磁場であって、ベクトルポテンシャルやスカラーポテンシャルは便宜的に導入された道具に過ぎないとも考えられた。またゲージ変換も理論の不定性を増すだけの余分な性質のようにも思われている。しかし量子力学などの立場からは、電場や磁場よりも電磁ポテンシャルの方が本質的な物理量である。その最も著しい表れ方がアハラノフ＝ボーム効果である。またゲージ変換は、荷電粒子と電磁場との相互作用の形を一意的に決定しているために便利である。

マクスウェル自身の原著論文『電磁場の動力学的理論』や原著教科書『電気磁気論』はここでの議論と同じくスカラ

ーポテンシャルとベクトルポテンシャルから始めて、電磁場を定義している。だが歴史的な逸話となるが、後にヘルツによって電磁ポテンシャルが消去されてしまい、(1)、(4) を電磁場の拘束条件とするようにしたのである。

マクスウェルの方程式のうち、電荷によって生じる電磁場の式 (2)、(3) は、真空中では、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{i} \qquad \text{光速}\quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

この式に電磁場の定義式 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ を代入すると、

$$\nabla^2\phi + \nabla\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{A}\right) + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = \mu_0\boldsymbol{i}$$

が得られる。したがって電磁ポテンシャルを基本的な量として電磁気的現象を記述する場合にはこの式が場の運動を決定する方程式となる。

ミンコフスキー（Minkowski）時空

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} c\rho \\ i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix}$$

すると、電荷の保存についての連続の式 $\nabla\cdot{}^{(3)}\boldsymbol{i} = -\partial\rho/\partial t$ は、

$\Box\cdot\boldsymbol{i} = 0$ となる。　$\Box = \begin{pmatrix} \partial/\partial(ct) \\ \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$

４元ポテンシャル

$$\mathrm{A}^i = \begin{pmatrix} \phi/c \\ {}^{(3)}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_i = \mathcal{G}_{ij}\mathrm{A}^j = \begin{pmatrix} \phi/c \\ -{}^{(3)}\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

電磁場テンソル F_{ij}

$$\mathrm{F}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{F}^{ij} = \mathcal{G}^{ik}\mathcal{G}^{jl}\mathrm{F}_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

すると、電磁場の定義式は、

$\mathrm{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　となる。　（ $\partial_i = \partial/\partial x^i$ ）

電磁場の拘束条件は、

$\partial_k \mathrm{F}_{ij} + \partial_i \mathrm{F}_{jk} + \partial_j \mathrm{F}_{ki} = 0$（自明　Bianch 恒等式）

電磁場の運動方程式は、

$\partial_j \mathrm{F}^{ji} = \mu_0 i^i$　　（$\partial_j \partial^j A^i - \partial^i (\partial_j A^j) = \mu_0 i^i$ あるいは $\Box A^i - \partial^i \partial_j A^j = \mu_0 i^i$）

である。　　$\Box = \boldsymbol{\Box} \cdot \mathscr{G}^{ij} \boldsymbol{\Box} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

ゲージ変換

前述のように電磁ポテンシャル A^i の選び方は一意ではない。しかし、条件（ゲージ固定条件）を課す事で一意に定める事ができる。

スカラーポテンシャルは常にゲージ変換によって $\phi = 0$ とすることが可能である。しかしベクトルポテンシャルは一般には $\boldsymbol{A} = 0$ とすることは不可能である。

ローレンツゲージ

$\partial_j A^j = 0$

この条件式を満たす電磁ポテンシャルを用いてマクスウェルの方程式を書き換えると、

$\partial_j \partial^j A^i = \Box A^i = \mu_0 i^i$

クーロンゲージ

$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

放射ゲージ

電荷密度、電流密度がともに 0 の場合、

$\phi = 0$

$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

を同時に満たすゲージを選ぶことが可能である。 このゲージはローレンツゲージであり、かつ、クーロンゲージである。このとき、電磁ポテンシャルの満たすべき方程式は、

$\Box \boldsymbol{A} = 0$　　波動方程式

ラグランジュ形式　（page12, 13 参照）

電磁場をラグランジュ形式により記述するとき、電磁場が物質と相互作用する系の作用積分は、

$\mathrm{S} = \mathrm{S}_{(m)} + \mathrm{S}_{(f)} + \mathrm{S}_{(mf)}$ と書かれる。

$\mathrm{S}_{(m)}$ は物質の項、$\mathrm{S}_{(f)}$ は電磁場の項、$\mathrm{S}_{(mf)}$ は物質と電磁場の相互作用項である。

電磁場の項は、$\mathrm{S}_{(f)} = -\frac{1}{4\mu_0}\int \mathrm{F}^{ij}\mathrm{F}_{ij}\, d^4x$

相互作用項は、$\mathrm{S}_{(mf)} = \int i^i A_i\, d^4x$

ラグランジアン　$L = -\frac{1}{4\mu_0}\mathrm{F}^{ij}\mathrm{F}_{ij} + i^i A_i$

最小作用の原理 $\delta \mathrm{S} = 0$ より、運動方程式 $\Box A^i = \mu_0 i^i$ が導ける。

電磁場のエネルギー・テンソル

$\mathrm{T}_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left(\mathscr{G}^{kl}\mathrm{F}_{ik}\mathrm{F}_{jl} - \frac{1}{4}\mathscr{G}_{ij}\mathrm{F}^{kl}\mathrm{F}_{kl}\right)$

ラグランジアン

「解析力学 / 解析力学」参照

これ以下の議論は、要点のみを簡単にとりあげるにとどめるが、全般的に、次の「一般相対性理論」でさらに重要となってくるものである＝そのための準備ということになるだろうか。

ラグランジアン（Lagrangian）は、ラグランジュ関数とも呼ばれ、運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の差を一般化座標 $\{q_k\}$ とその時間微分 $\{\dot{q}_k\}$ で表した関数。

$L(q, \dot{q}, t) = T$（運動エネルギー）$-V$（ポテンシャルエネルギー）

ラグランジアンはエネルギーの次元を持つスカラーであるが、観測可能な物理量ではなく、その値自体に物理的な意味があるわけではない。また、座標と時間の任意関数 $f(q, t)$ の時間による微分を加えた

$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \dfrac{d}{dt} f(q, t)$ の形でも全く同じ力学系を表す。

運動方程式

例えば、時刻 t_0 に位置 x_0 にあった粒子が、t_1 に位置 x_1 に移動した場合を考えてみる。このとき、位置 x_0 と x_1 の間を結ぶ運動は、力学的エネルギー保存則が成立する保存系では、ラグランジアン L の時間積分 S（作用積分）を用いて次のようにあらわすことができる。

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0$$

位置 x_0 と x_1 の間を通るさまざまな経路のうち、作用積分 S の変分がゼロ、すなわちラグランジアン L の変動が最小（極値）となるような経路に沿った運動のみが実現されることを意味し、このような原理を最小作用の原理と呼ぶ。

作用の停留条件 $\delta S = 0$ から、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

が得られる。 これはニュートンの運動方程式と同等である。

///

少しずれた道筋 − 最も経済的な道筋 $= L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}) - L(q, \dot{q}) = \dfrac{\partial L}{\partial q}\delta q + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}$

$\delta S = \int (\dfrac{\partial L}{\partial q}\delta q + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q})dt = 0$　　　ここで部分積分　$\int f g' = f g - \int f' g$ を使うと

$= \int (\dfrac{\partial L}{\partial q}\delta q - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q)dt + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q$　　途中をずらしても、スタートとゴール地点は変えていないので $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q = 0$

$= \int (\dfrac{\partial L}{\partial q}\delta q - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q)dt = 0$

つまり、$\dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

運動量

一般化運動量はラグランジアンの一般化速度による微分

$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ によって定義される。これは並進対称性から導かれる保存量である。

一般化運動量を用いると、ラグランジュの運動方程式は

$\dot{p}_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ となる。ニュートンの運動方程式との比較から、右辺は一般化された力と見ることも出来る。

次のような高校生たちが作るサイトをみつけた。量子力学の径路積分だが、対話形式でなかなかおもしろい。

最小作用の原理を理解するには、古典的な粒子のイメージではなく、量子力学的な波動のイメージで考えるとよい。

量子力学的には、粒子の本質は波動であり、ある地点（始点 O）から別の地点（終点 P）まで粒子が移動するとき、その移動経路は 1 つではなく、実際には、始点 O から終点 P までの『無数の経路』を量子力学的な波動が伝播しているものと考える。ただし、それぞれの経路を通る波は同じように振動せず、その波の振動は、作用積分 S に依存することが知られている。量子力学的には、始点 O から終点 P までの遷移振幅は、作用積分 S を用いて、始点 O から終点 P に至るあらゆる経路を通る波の寄与の和として書くことができる。

ここで、作用積分 S が最小の経路を通る波の変動は緩やかなため、近くの経路を通る波と強め合うが、作用積分 S が大きな経路を通る波の変動は激しいため、近くの経路を通る波と山と谷が打ち消し合って弱め合う。その結果、作用積分 S が大きな経路を通る波の寄与は打ち消し合って消滅してしまい、作用積分 S が最小となる経路を通る波の寄与だけが強め合って最終的に残る。この残った経路が、ちょうど古典的な粒子の運動方程式の経路と一致することになる。これは、停留値法の考え方と似ている。このように、ラグランジアンは、波の振動の振る舞いを決定する基本的な量であり、粒子が波動であると考えることによって、その本質を理解することができる。　http://dreistein.hatenablog.com/entry/2015/01/15/080000

場のエネルギー・運動量テンソル

一般的な形で論議する。

$$S = \int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) dVdt = \int \frac{1}{c}\Lambda\, d\Omega$$

Λ は、系を記述する量 q と $\frac{\partial q}{\partial x^i}$ の関数である。（電磁場では、q は A_i であるが、ここでは簡単のため 1 個の q だけである。系が閉じているという数学的表現は、Λ があからさまに x^i に依存しないことである。）

$\int \Lambda\, dV$ は系のラグランジアンであり、したがって、Λ は系のラグランジアン密度とみなすことができる。

運動方程式

運動方程式は最小作用の原理にしたがって、S を変分することによって求められる。

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta\frac{\partial q}{\partial x^i}\right) d\Omega \qquad q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x^i}$$

$$= \frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right] d\Omega$$

↑ 表面積分で消える（表面では $\delta q = 0$）

$$= \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right)\delta q\, d\Omega = 0$$

δq は任意だから、すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \qquad \text{運動方程式}$$

エネルギー・運動量テンソル

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\frac{\partial q_{,j}}{\partial x^i}$$ だから、上式を代入して、

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\right)\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\frac{\partial^2 q}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\frac{\partial q}{\partial x^i}\right)$$

$T_i^j = \frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}} - \delta_i^j \Lambda$ とすると、 $\frac{\partial T_i^j}{\partial x^j} = 0$

いくつかの q があるときは、$T_i^j = \sum \frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}} - \delta_i^j \Lambda$

$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0$　　これは、保存則をあらわす。　$\frac{1}{c}T^{i0}$ が密度、$T^{i\mu}$ が流れ（μ は $1 \sim 3$）

$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T^{i0} dV = -\int \frac{\partial T^{i\mu}}{\partial x^\mu} dV = -\oint T^{i\mu} dS_\mu$　　（μ は $1 \sim 3$、$x^0 = ct$）

$p^i = const \int T^{i0} dV$　が保存される。（すぐ後に $const = \frac{1}{c}$ が示される。）

このベクトルは、系の 4 元運動量ベクトルと同一のものとみなさなければならない。

すると、$p^0 = \xi/c$（エネルギーを c で割ったもの）だから、

$p^0 = const \int T^{00} dV = \xi/c$

一方、$T^{00} = \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda$　（$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$）　だから、

エネルギーとラグランジアンとを関係づける通常の式とくらべると、T^{00} はエネルギー密度とみなさなければならない。

したがって、$\int T^{00} dV$ は系の全エネルギーである。

すなわち、$const = \frac{1}{c}$

$p^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} dV$

テンソル T^{ij} は、系の<u>エネルギー・運動量テンソル</u>と呼ばれる。

T^{ij} は、一義的ではない

$T^{ij}+\dfrac{\partial\varphi^{ijk}}{\partial x^{i}}$　（$\varphi^{ijk}=-\varphi^{ikj}$　j,k について反対称）もまた、$\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial x^{j}}=0$ を満足する。

$$p^{i}=\frac{1}{c}\int(T^{i0}+\frac{\partial\varphi^{i0k}}{\partial x^{k}})dV=\frac{1}{c}\int(T^{i0}+\frac{\partial\varphi^{i0\mu}}{\partial x^{\mu}})dV \quad (\varphi^{i00}=0 \text{ だから})$$

$$=\frac{1}{c}\int T^{i0}\,dV+\frac{1}{c}\oint\varphi^{i0\mu}dS_{\mu}$$

↑無限遠で場は０だからこの項は消える

すなわち、運動量には、かわりはない。

T^{ij} を一義的にするためには、系の角運動量のテンソルを p^{i} によって表すことができるという要請を使う。

$$M^{ij}=\int(x^{i}dp^{j}-x^{j}dp^{i})\,dV=\frac{1}{c}\int(x^{i}T^{j0}-x^{j}T^{i0})\,dV$$

したがって、角運動量の保存則は、

$\dfrac{\partial(x^{i}T^{jk}-x^{j}T^{ik})}{\partial x^{k}}=0$ となる。

$\dfrac{\partial x^{i}}{\partial x^{k}}=\delta_{k}{}^{i}$ 、$\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial x^{j}}=0$　より

$$T^{ji}-T^{ij}=0$$

すなわち、対称になるように φ^{ijk} を調整して、T^{ij} をきめればよいのである。

//

$$p^{i}=\frac{1}{c}\int T^{i0}dV$$

T^{00}　エネルギー密度

$\dfrac{1}{c}T^{\mu 0}$　運動量密度

$$\frac{\partial}{c\partial t}\int T^{i0}dV=-\oint T^{i\mu}dS_{\mu}$$

すなわち、

① $cT^{0\mu}$ は、エネルギーの流量密度 $\boldsymbol{S}$（単位時間に単位面積を通してはこばれるエネルギー量）である。

これから、エネルギー流と運動量密度のあいだの重要な関係が自動的に導かれる。

すなわち、$\boldsymbol{S}=c^{2}*$(運動量密度)

② $T^{\mu\nu}$ は、応力テンソルとよばれる運動量の流れの密度の３次元テンソルである。

これを、$\sigma_{\alpha\beta}$ であらわす。

$$T^{ij}=\begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

第 2 部　一般相対性理論

はじめに

アインシュタインは、特殊相対性理論につづいて、慣性系のみならず非慣性系をも含む一般的な相対性の原理を定式化したとよく間違えられるが、これは正しくはない。このような試みは、相対性原理自体からすべての物理的内容を取り去ることによってしか達せられないであろう。現実に、物理的内容のある「一般相対性理論」と名付けられるものは、実際には、非慣性系への拡張ではなく、万有引力の理論である。その意味で「特殊」とか「一般」とかはあまり正確ではなく、相対性理論と重力理論である。

等価原理

重力場の基本的な特徴は、そのなかでは初期条件さえ同じならば、すべての物体がその質量や電荷にかかわりなく、同じように運動するということである。重力場での運動と非慣性基準系からみた運動との間に、本質的な類比を求めることができる。すなわち、非慣性基準系（力が働いている系）は、適当な重力場に同等である。これを『等価原理』という。これは、慣性質量と重力質量が同等であるといってることになる。

しかし、非慣性基準系で生じるみかけの重力場は、真の重力場と同じではない。無限遠において、真の重力場はゼロに向かうのに対して、前者は有限か無限大（例えば、円運動のとき）となるからである。また、前者は基準系をかえることによって打ち消せるのに対して、後者は、完全に打ち消せない。ただ、局所的に可能なだけである。

相対論的力学における重力場

慣性基準系では、デカルト座標を使ったとき、世界間隔 ds は、

$ds^2 = d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ となり、

これが、慣性座標間の座標変換（ローレンツ変換）に対して不変であった。

しかし、非慣性系となると、世界間隔はもっと一般的な二次形式となり、

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ となる。

すなわち、曲線座標を導入し、この曲線座標の幾何学的性質を決定するのが g_{ij} である。また、非慣性系は、ある重力場に同等であるといったが、これらの場が g_{ij} によって決定されるのである。このような相対性理論にもとづいてつくられた重力場の理論は、**一般相対性理論**とよばれる。

非慣性基準系は、座標変換によって g_{ij} をガリレイ的なものにすることができるが、真の重力場は、全空間でガリレイ的なものにすることができない（局所的には可能）。そのような時空は、そういった変換が可能な平坦な時空と区別して、曲がっているといわれる（時空の曲がり＝重力場）。

このように、曲がった時空間は、重力場理論（一般相対性理論）の原動力そのものである。そして、これから見ていくように、空間の曲がりは、電子などの物体であったり電磁場であったり、つまり、さまざまなエネルギーの存在のあり様によって決定されていくことがわかるだろう。大胆な言い方をすれば、ものの存在のあり様 $\Longleftrightarrow$ 時空のあり様という双方向の関係性がそこには成りたっている。存在が空間を規定し、また同時に、空間が存在を規定するという関係性である（重力波の伝播 / 粒子の生成・消滅、相互転換 …… ）。もっと極言すれば、空間は単にものが入る器などではなく、「空間＝存在」といった等号が成立することになるのかもしれない。

ともかく、特殊相対性理論のはじめにとりあげた次の一文、これが、一般相対性理論では決定的な深みをもって迫ってくるのではないだろうか。「相対性理論では、相互作用の伝播速度が有限であることのために事態は根本的に一変する。１個の粒子の位置の変化の影響が他の粒子におよぶのは、ある長さの時間が経過してのちである。このことは、場それ自体が物理的実存性を獲得することを意味している。」

リーマン（Rieman）幾何学

曲がった空間を数学的に表わすのがリーマン幾何学である。
リーマン空間 Rn では、その中の各点において、基本 (計量) テンソル g_{ij} が与えられており、
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ との間の距離 ds が
$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$　であらわせる。　空間の計量
ds は、座標系によって不変。

Column //

宇宙原理

宇宙にはどこにも特別な場所がなく (一様性)、どの方向にも特別な方向がない (等方性) という要請。アインシュタインは一般相対性理論に基づいて宇宙モデルを作る際、これらの空間の性質に加えて「宇宙は時間的にも変わらない (定常性)」を要請した。定常性まで含めた要請を完全宇宙原理という。その後、宇宙膨張の発見により、定常性の要請は不要となった。

R 上の任意の点 $p \longrightarrow$ R′ 上の点 p' への写像で $ds = ds'$ ならば、
この写像 (R $\longrightarrow$ R′) を計量写像という。

Rn を Rn 自身に移すような計量写像は、 1 つの群を作っている。これを Rn の運動群 $\mathscr{M}$ という。
$\mathscr{M}$ の次元数 $\leqq \dfrac{n(n+1)}{2}$

Rn の中の 1 点 o を、Rn の中の任意の点 p に移すような計量写像が、$\mathscr{M}$ の中に必ず含まれているとき、Rn の中のすべての点が同等になり、このような空間は一様であるという。 （平行移動に対して変化しない）

Rn の 1 点 o を、それ自身に移すような $\mathscr{M}$ の部分集合を 、o のまわりの回転群 $\mathscr{R}$ という。
o のまわりの回転群 $\mathscr{R}$ の次元数が $\dfrac{n(n-1)}{2}$ であれば、o のまわりのどの方向も同等になる。
この場合、Rn は点 o のまわりで等方性があるという。 （回転変換に対して変化しない）

Rn は一様で、等方性 $\rightleftarrows$ Rn は次元数 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ の $\mathscr{M}$ をもつ
Rn が、その中の任意の点 p のまわりで等方性をもつ $\longrightarrow$ Rn は一様

// End Column

さて、リーマン幾何学で重要なのは次の 2 点になる。
g_{ij} が場所、時間とともに変化する。
$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$　が不変。　　$g_{ij} = g_{ji}$　対称（16 成分のうち独立成分は 10 個）

反変ベクトル　$A'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$

共変ベクトル　$A'_i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^j} A_j$

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$　は不変だから、g_{ij} は共変テンソル。

$g'_{ij} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i} \dfrac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}$

g_{ij} の逆行列を g^{ij} とおく。　　g^{ij} は反変テンソル。
$g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k$ （ $i = k$ のとき 1 、$i \neq k$ のとき 0 ）
δ_i^i は次元数をあらわす。

反変・共変の相互変換
$g_{ij} A^j = A_i$
$g^{ij} A_j = A^i$

準備（クリストッフェル記号）

ここでの目標は、曲がった空間内でのベクトルの平行移動がどのようにあらわせるかということになる。
結論から述べると、クリストッフェル記号を用いて、次のようになる。

$dA_j = \Gamma^i{}_{jk} A_i \, dx^k$　　共変ベクトルの平行移動

$dA^j = -\Gamma^j{}_{lk} A^l \, dx^k$　　反変ベクトルの平行移動

この結論を導くためにはいくつかの方法があるが、ここでは 4 次元空間をさらに高次な空間から眺めてみるという方法をとりあげてみよう。

4 次元の物理空間が、N 次元 $(N > 4)$ の平らな空間に埋め込まれていると考える。
この N 次元空間に、直線座標 Z^n（直交でなくてもよい）を置く。
隣接した 2 点の間には、

$ds^2 = h_{nm} \, dz^n \, dz^m$　で定まる不変距離がある。

$n, m = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, N$

h_{nm} は定数（平らな空間）

この N 次元空間のなかで、物理空間は 4 次元の曲面をなす。
曲面上の各点を、物理空間座標で x^i、N 次元空間座標で y^n とする。

$y^n = y^n(\boldsymbol{x})$

この N 個の方程式から 4 個の x^i を消去すれば、$N-4$ 個の方程式が残って、N 次元空間のなかの曲面を定める。

$$\delta y^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \, \delta x^i$$

$$\delta s^2 = h_{nm} \, \delta y^n \, \delta y^m$$

$$= h_{nm} \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y^m}{\partial x^j} \, \delta x^i \, \delta x^j$$

$$= \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y_n}{\partial x^j} \, \delta x^i \, \delta x^j \qquad y_n = h_{nm} y^m \ (h_{nm} \text{ は定数})$$

$\delta s^2 = g_{ij} \, \delta x^i \, \delta x^j$　だから、

$$g_{ij} = \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y_n}{\partial x^j} \qquad \text{———} \quad ①$$

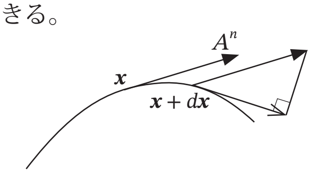
物理空間の点 $\boldsymbol{x}$ に反変ベクトル A^i があるとする。
これを N 次元空間でみると、反変ベクトル A^n となる。

$$A^n = \frac{\partial y^n}{\partial x^i} A^i \qquad \text{———} \quad ②$$

これを A^n 自身に平行に隣の点 $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ に移すと、もはや新しい点ではベクトルは曲面内にはおさまらない。しかし、それを曲面上へ射影することで、曲面内におさまるベクトルをつくることができる。

この $A^n_{\text{接線}}$ を x 座標系にひきなおして K^i と書けば、

$$A^n_{\text{接線}} = \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} K^i \qquad (\text{接線ベクトル})$$



$h_{nm} A^n_{\text{法線}} A^m_{\text{接線}} = 0$　　直交

$$= h_{nm} A^n_{\text{法線}} \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} K^i = A^n_{\text{法線}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} K^i \qquad y_n = h_{nm} y^m \ (h_{nm} \text{ は定数})$$

K^i にかかわらず、これが 0 となるためには、

$$A^n_{\text{法線}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} = 0$$

$$A^n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} = (A^n_{\text{法線}} + A^n_{\text{接線}}) \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}}$$

$$= A^n_{\text{接線}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}}$$

$$= K^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}}$$

$$= K^i g_{ij(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})} \qquad \leftarrow \ ①\text{より}$$

$= K_{j\,(x+dx)}$

したがって、

$K_{j\,(x+dx)} = A^n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_{x+dx} = A^n \left[\left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x + \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x}{\partial x^k} dx^k \right]$　　1 次近似まで

$= A^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_x \left[\quad 〃 \quad \right]$　　← ②より

$= A_j + A^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_x \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x}{\partial x^k} dx^k$　　← ①より

$dA_j = K_j - A_j = A^i \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)_x \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)_x}{\partial x^k} dx^k$　　———　③

$g_{ij} = \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial y_n}{\partial x^j}$ を微分すると、　　← ①参照

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)}{\partial x^k} \frac{\partial y_n}{\partial x^j} + \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)}{\partial x^k}$

$= \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)}{\partial x^k} \frac{\partial y^n}{\partial x^j} + \quad 〃$　　← h_{nm} は定数

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial y_n}{\partial x^j}\right)}{\partial x^k} \frac{\partial y^n}{\partial x^i} = \Gamma_{i,jk}$ とおく。（第一種のクリストッフェル記号 / 似非テンソル　j 、k について対称）　　$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ 等は似非テンソル

$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$　　———　④

$dA_j = A^i \Gamma_{i,jk} dx^k$　　← ③より

これで、N 次元空間をひきあいに出す必要が、まったくなくなった。というのは、Γ は物理空間の計量テンソル g_{ij} にのみ、かかわるものだからである。（参考　「ガウスの驚異の定理」）

$\Gamma^i{}_{jk} = g^{il} \Gamma_{l,jk}$ とおくと、（第二種のクリストッフェル記号 / 似非テンソル。　j 、k について対称）

$\underline{dA_j = \Gamma^i{}_{jk} A_i dx^k}$　となる。　　共変ベクトルの平行移動

$g_{im} \Gamma^m{}_{jk} = g_{im} g^{ml} \Gamma_{l,jk}$

$= \delta^l_i \Gamma_{l,jk}$

$= \Gamma_{i,jk}$

$dA^j = d\,(g^{ij} A_i)$

$= \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} dx^k A_i + g^{ij} dA_i$　　$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = - g^{il} g^{jm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}$　（下の Calc.Corner 参照）

$= - g^{il} g^{jm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} dx^k A_i + g^{ij} A^l \Gamma_{l,ik} dx^k$

$= - A^l g^{jm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} dx^k + \quad 〃$

$= A^l g^{ij} dx^k \left(\Gamma_{l,ik} - \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} \right)$

$= - A^l g^{ij} dx^k \Gamma_{i,lk}$　　← ④より

$\underline{dA^j = - \Gamma^j{}_{lk} A^l dx^k}$　　反変ベクトルの平行移動

$d(A^j B_j) = dA^j B_j + A^j dB_j$

$= - \Gamma^j{}_{lk} A^l dx^k B_j + A^j \Gamma^l{}_{jk} B_l dx^k$

$= 0$

Calc.Corner

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} &= \delta^i_m \frac{\partial g^{mj}}{\partial x^k} \\
&= g^{il} g_{lm} \frac{\partial g^{mj}}{\partial x^k} \qquad \text{page17 参照} \\
&= g^{il} \left(\frac{\partial (g_{lm} g^{mj})}{\partial x^k} - g^{mj} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \right) \\
&= g^{il} \left(\frac{\partial \delta^j_l}{\partial x^k} - g^{mj} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \right) \\
&= - g^{il} g^{mj} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}
\end{aligned}
$$

測地線

ユークリッド空間で直線といえば、曲がることのない線である。リーマン空間で、一般に直線というものはないが、『曲がらない』ということを『自分自身に平行である』という性質と考えれば、ユークリッド空間の直線に対応する曲線が得られる。これを、測地線という。

座標の点 x^i をとり、あるパラメータ ξ によって動くものとする。

このとき、$\dfrac{dx^i}{d\xi} = u^i$ とおき、u^i が平行移動をうけるように動かすのである。

このようにしてつくられた軌道が測地線。

もし ξ として時間を使っていたならば u^i は速度ベクトルを意味することになる。しかし ξ は別に時間でなくてもいい。要するに u^i はどの方向へ向かっているかを表しているのであり、曲面上にいる人にとっての、曲線コースの接線ベクトルである。
たとえどんな座標軸が描かれていようとも、たとえ我々が進んでいる方向を示している接線ベクトル u^i の値が目まぐるしく変化し続けようとも、その変化が座標の上を平行移動した事のみによる変化だということが保証されていればそれで真っ直ぐ進んだことになる。

$$\frac{du^i}{d\xi} + \Gamma^i{}_{jk}\, u^j \frac{dx^k}{d\xi} = 0$$

パラメータ ξ を、固有時 s とおくと、速度ベクトル $v^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ に一致する。（固有時については、page7 参照）

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk}\, v^j v^k = 0 \qquad \text{あるいは、} \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

空間が平坦である場合は、$\dfrac{dv^i}{ds} = 0$ となる。つまり、v^i は s の 1 次式であり 通常の直線（運動）の方程式を表すものとなる。

仮定

①重力のほかにどんな力も受けない質点の世界線は時間的な（パラメータ s）測地線である。

　重力以外の外力を全く受けない粒子の世界線は測地線の一種であり、換言すれば、自由運動、もしくは自由落下をしている粒子は測地線に沿って運動する。

　これが、ニュートン力学の第一法則にとってかわる。

②光の経路は、ゼロ測地線である。

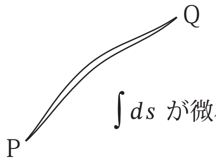
　その ξ として、固有時 s をとることはできない。$ds = 0$ だからである。

　それに沿って、$ds = 0$ であるような測地線は、ゼロ測地線とよばれる。

　このとき、u^i の長さはゼロである。$g_{ij}\, u^i u^j = 0$

測地線の停留性

　測地線である　$\Leftrightarrow$　$\int ds$ が停留性をもつ



$\int ds$ が微小変形によって変わらない

共変微分

S をスカラーとすると、$\dfrac{\partial S}{\partial x^i}$ が共変ベクトルになることは、すでにのべた。しかし、$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ は共変テンソルとはならず、似非テンソルにすぎない（※参照)。これを、微分手続きを変更して、共変テンソルを得ることはできないだろうか。

$$A_{i\,(x+dx)} - \underbrace{\{A_{i\,(x)} + \Gamma^j{}_{ik} A_j\, dx^k\}}_{A_{i\,(x)}\text{ を } x+dx \text{ まで平行移動したもの}} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik} A_j\right) dx^k$$

これは、ベクトルであるから、商定理より、

$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik} A_j$ は、テンソルである。これを、$A_{i:k}$ であらわす。

$$A_{i:k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik} A_j$$

同じように、反変ベクトルの場合は、$A^i{}_{:k} = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{jk} A^j$

テンソル T_{ij} の場合は、は $T_{ij} = A_i B_j$ であらわせるから $A_i B_j$ で検討する。

共変微分を、次のように定義する。

$(A_i B_j)_{:k} = A_{i:k} B_j + A_i B_{j:k}$　　これは、明らかにテンソルである。

$$= \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^l{}_{ik} A_l\right) B_j + A_i \left(\frac{\partial B_j}{\partial x^k} - \Gamma^l{}_{jk} B_l\right)$$

$$= \frac{\partial (A_i B_j)}{\partial x^k} - \Gamma^l{}_{ik} A_l B_j - \Gamma^l{}_{jk} A_i B_l\,)$$

すなわち、

$$T_{ij:k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l{}_{ik} T_{lj} - \Gamma^l{}_{jk} T_{il}$$

計量テンソルを共変微分すると、0 になる。

$g_{ij:k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l{}_{ik} g_{lj} - \Gamma^l{}_{jk} g_{il}$　　page17　$g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i$　より　$\Gamma^l{}_{ik} g_{lj} = g^{ml} \Gamma_{m,ik} g_{lj} = \delta^m_j \Gamma_{m,ik} = \Gamma_{j,ik}$

$= \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{j,ik} - \Gamma_{i,jk}$　　page19 ④参照

$= 0$

一般に共変微分を、次のように定義する。

$$Y^{ab\ldots}{}_{ij\ldots:k} = \frac{\partial Y^{ab\ldots}{}_{ij\ldots}}{\partial x^k} + \Gamma^a{}_{lk} Y^{lb\ldots}{}_{ij\ldots} + \Gamma^b{}_{lk} Y^{al\ldots}{}_{ij\ldots} + \cdots\cdots - \Gamma^l{}_{ik} Y^{ab\ldots}{}_{lj\ldots} - \Gamma^l{}_{jk} Y^{ab\ldots}{}_{il\ldots} - \cdots\cdots$$

当然、スカラー S の場合は、$S_{:k} = \dfrac{\partial S}{\partial x^k}$

X、Yを任意のテンソルとすると

$(XY)_{:k} = X_{:k} Y + X Y_{:k}$　がなりたつ。　　証明略

物理法則は、どんな座標系においても、あまねくなりたつのでなければならない。だから、そのなかに場の量の微分が含まれるとき、それは共変微分でなければならない。物理学における場の方程式は、すべて書き換えてふつうの微分を共変微分に直す必要がある。

※

$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^k}$ は、似非テンソルなので計算にはつねに注意が必要。

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k$$

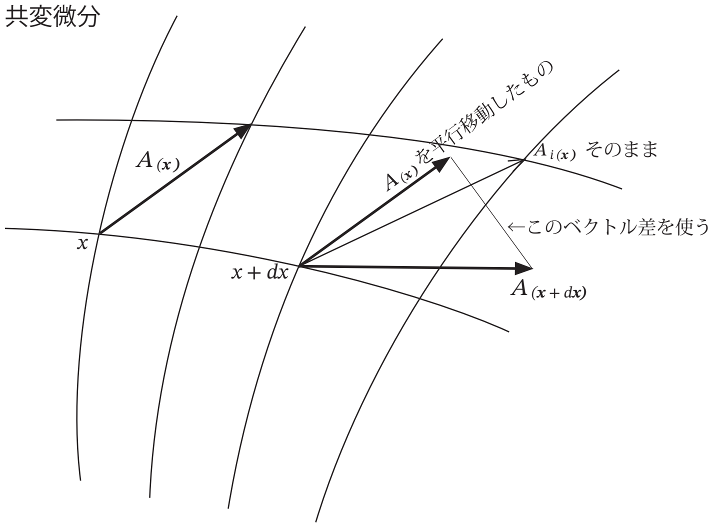
$$\frac{\partial A'_i}{\partial x'^j} = \frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k\right)$$

$$= A_k \frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right) + \frac{\partial A_k}{\partial x'^j}\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

$$= A_k \frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right) + \frac{\partial A_k}{\partial x^m}\,\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

第一項目が余計なものとして加わっていることがわかる。

共変微分



曲率テンソル

微分を２度つづけて行うとき、順序はどうでもよいというふつうの微分の重要な性質が、共変微分に対して一般的にはなりたたない。

スカラー場 S の場合は、$S_{:k:l} = S_{:l:k}$ で問題はない。

ベクトル場 A_j の場合は、
T_{jk} を $A_{j:k}$ とみて、

$$A_{j:k:l} = \frac{\partial A_{j:k}}{\partial x^l} - \Gamma^m{}_{jl} A_{m:k} - \Gamma^m{}_{kl} A_{j:m}$$

さらに、$A_{i:k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik} A_j$ を代入していく。

$= \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$ 以下略

この長くなる計算結果から、$A_{j:k:l}$ の k と l をとりかえたものを引けば、最終的に、

$A_{j:k:l} - A_{j:l:k} = A_i R^i{}_{jkl}$ 　　左辺はテンソルだから、商定理より $R^i{}_{jkl}$ もテンソル

ただし、$R^i{}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m{}_{jl} \Gamma^i{}_{mk} - \Gamma^m{}_{jk} \Gamma^i{}_{ml}$

この $R^i{}_{jkl}$ を、曲率テンソルとよぶ。

$R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}$

$R^i{}_{jkl} + R^i{}_{klj} + R^i{}_{ljk} = 0$

$R_{ijkl} = g_{ia} R^a{}_{jkl}$ 　　定義 $\Gamma^i{}_{jk} = g^{il} \Gamma_{l,jk}$ 、さらに、$g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i$ 、$\Gamma_{i,jk} + \Gamma_{j,ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ より　page19 参照

$$= \frac{\partial \Gamma_{i,jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{i,jk}}{\partial x^l} - \Gamma_{m,ik} \Gamma^m{}_{jl} + \Gamma_{m,il} \Gamma^m{}_{jk}$$

$R_{ijkl} = -R_{jikl}$

$R_{ijkl} = R_{klij} = R_{lkji}$

こうした対称性のため、R_{ijkl} の 256 個の成分のうちで 20 個だけが独立ということになる。

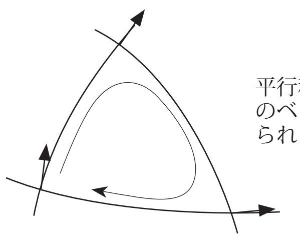
テンソル T_{ij} の場合は、

$$T_{ij:k:l} - T_{ij:l:k} = T_{mj} R^m{}_{ikl} + T_{im} R^m{}_{jkl}$$

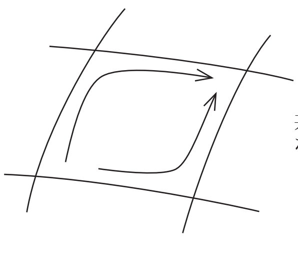
ビアンキ恒等式

$$R^i{}_{jkl:m} + R^i{}_{jlm:k} + R^i{}_{jmk:l} = 0$$

空間が平らであれば、直線座標がとれて、g_{ij} は定数となり、曲率テンソル R_{ijkl} は 0 になる。
逆に、$R_{ijkl} = 0$ なら、空間は平らである。　　証明略



平行移動して一循すると、もとのベクトルと違うベクトルが得られる。



共変微分の順序によって、ことなる値がえられる。

リッチ・テンソル

テンソルの縮約について

上付きの添え字と下付きの添え字が同じになる成分の和を取ると、その２つの添え字を消したテンソルと同じになる。たとえば、$A^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}$ というような４階の混合テンソルがあったとして、μ と λ が同じになる成分の和を取ると、

$A^{\mu\nu}{}_{\mu\rho} = A^{\nu}{}_{\rho}$

というように、２階の混合テンソルとして扱えるようになる。

$R^{m}{}_{imj} = R_{ij}$　　これをリッチ・テンソルという。

$R_{ij} = R_{ji}$　　対称

$R_{ij} = R^{m}{}_{imj} = R_{i}{}^{m}{}_{jm} = R_{mj}{}^{m}{}_{i} = R_{jmi}{}^{m}$

$\quad = -R^{m}{}_{ijm} = -R_{i}{}^{m}{}_{mj} = -R_{jm}{}^{m}{}_{i} = -R_{mji}{}^{m}$

$R^{m}{}_{mij} = R_{m}{}^{m}{}_{ij} = R_{ij}{}^{m}{}_{m} = R_{ijm}{}^{m} = 0$

$g^{ij} R_{ij} = R^{i}_{i} = R$　　これをスカラ曲率または全曲率という。

$R^{m}{}_{nij:k} + R^{m}{}_{njk:i} + R^{m}{}_{nki:j} = 0$　　ビアンキ恒等式

$k = m$ とおき、g^{ni} をかける。　　g^{ij} は共変微分に対して定数なみ　$g^{ij}{}_{:k} = 0$　　page22

$(g^{ni} R^{m}{}_{nij})_{:m} + (g^{ni} R^{m}{}_{njm})_{:i} + (g^{ni} R^{m}{}_{nmi})_{:j} = 0$

$(g^{ni} g^{ml} R_{lnij})_{:m} + (g^{ni} R_{nj})_{:i} - (g^{ni} R_{ni})_{:j} = 0$

$(g^{ml} R_{lj})_{:m} + (g^{ni} R_{nj})_{:i} - R_{:j} = 0$

$2R^{m}_{j:m} - R_{:j} = 0$　　g^{ij} をかけると

$2R^{im}{}_{:m} - (g^{ij} R)_{:j} = 0$

$(2R^{im} - g^{im} R)_{:m} = 0$　　リッチ・テンソルに対するビアンキ恒等式

R_{ij} のあからさまな形

$$R_{ij} = R^{m}{}_{imj} = \frac{\partial \Gamma^{m}{}_{ij}}{\partial x^{m}} - \frac{\partial \Gamma^{m}{}_{im}}{\partial x^{j}} + \Gamma^{k}{}_{ij} \Gamma^{m}{}_{km} - \Gamma^{k}{}_{im} \Gamma^{m}{}_{kj}$$

アインシュタインの仮定

からっぽの空間（物質も存在せず、重力場のほかには、どんな物理的な場も存在しないことを意味する）では、

$R_{ij} = 0$ が成り立つ。　　重力の法則

一般相対性の原理

リーマン時空の一点 P において、線形の座標変換により、基本テンソル g_{ij} を対角化して、$ds=(dx'^0)^2-(dx'^1)^2-(dx'^2)^2-(dx'^3)^2$ とし、さらに、測地線座標になおすと、点 P でこのリーマン時空に接するミンコフスキー時空を得る。
このミンコフスキー時空で、物理法則を特殊相対論による形であらわしておき、これをもとの時空にもどせば、一般の空間における物理法則の形がわかる。
一般の時空には、ミンコフスキー時空の慣性座標系に対応するような特別な役割をもつ（大域の）座標系は存在しない。そのかわり、すべての座標系が同等の立場をもっており、物理法則はいかなる座標変換を行ってもその表現の形が保たれるように、共変性をもったテンソル方程式として書かれねばならない。これを、一般相対性の原理という。

計算上の注意点

ガリレイ座標では、ベクトル A_i の微分 dA_i はベクトルで、$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$ はテンソルである。しかし、曲線座標では、そうはならない。 dA_i はベクトルでなく、$\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$ はテンソルではない。それは、dA_i が異なる点に位置するベクトル差だからであり、曲線座標において、$A_{i(\boldsymbol{x})}$ を $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{dx}$ に平行移動しても $A_{i(\boldsymbol{x})}$ にはならないからである。

$$A'_i=\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}A_k$$

$$dA'_i=d\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)A_k+\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}dA_k$$

$$\frac{\partial A'_i}{\partial x'^j}=\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}A_k\right)$$

$$=A_k\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)+\frac{\partial A_k}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

$$=A_k\frac{\partial}{\partial x'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right)+\frac{\partial A_k}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

それぞれ、曲線座標では第一項目が 0 にはならない。これが 0 になるのは、x^k が x'^i の 1 次関数のときのみである。

若干の計量関係の公式

$g_{ij}=g_{ji}$　対称

$g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$

$g_{ij:k}=0$　　$g^{ij}{}_{:k}=0$　　$g^i{}_{j:k}=0$　　共変微分に対してあたかも定数のようにふるまう

$$g=|g_{ij}|=\frac{1}{|g^{ij}|}$$

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}=g\,g^{ij}\qquad \frac{\partial g}{\partial g^{ij}}=-g\,g_{ij}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=g\,g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$\Gamma^i{}_{ik}=g^{ij}\Gamma_{j,ik}=\frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$$

$g^{ij}\left(\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$ は i、j に対して反対称かつ同等だから 0。

$$=\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

$$=\frac{\partial\log\sqrt{-g}}{\partial x^k}\qquad(g<0)$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=-g^{im}g^{jn}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}\qquad \because\ \frac{\partial(g^{im}g_{mn})}{\partial x^k}=\frac{\partial g^i_n}{\partial x^k}=0$$

page20 参照

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^k}g_{mn}+g^{im}\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}=0$$

両辺に g^{jn} をかける

このあたりでもとの議論にもどる。

ミンコフスキー時空で $\dfrac{d^2x^i}{d\xi^2}=0$ なら、　（ξ はあるパラメータ）

重力場では、$\dfrac{d^2x^i}{d\xi^2}+\Gamma^i{}_{jk}\dfrac{dx^j}{d\xi}\dfrac{dx^k}{d\xi}=0$ となる。 page21 測地線参照。

質点のときは、ξ を固有時間 s とすると、速度ベクトルを $v^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ として、
運動方程式 $\dfrac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk}\, v^j v^k = 0$ となる。

光の伝播のときは、$ds = 0$ だから、これは使えない。
そこで、幾何光学における伝播の方向は、波動ベクトルによってきまるということを利用する。

$f = ae^{i(\boldsymbol{k\cdot r} - \omega t + \alpha)} = ae^{i\psi}$

$\boldsymbol{k} = \dfrac{\omega}{c}\, \boldsymbol{n}$　　$\boldsymbol{n}$ は伝播方向の単位ベクトル、ω は振動数

$k^i = (\dfrac{\omega}{c}, \boldsymbol{k})$　　4 次元の波動ベクトル

4 次元波動ベクトルは、λ をあるパラメータとして、$k^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \lambda}$ の形に書くことができる。

ミンコフスキー時空では、$\dfrac{dk^i}{d\lambda} = 0$ だから、

重力場では、$\dfrac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i{}_{jk}\, k^j k^k = 0$

$k_i k^i = 0$

または、$\dfrac{d^2x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i{}_{jk} \dfrac{dx^j}{d\lambda} \dfrac{dx^k}{d\lambda} = 0$

$g_{ij}\, dx^i dx^j = 0$

重力による赤方偏移（静的な重力場）

$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$

$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2$　　$d\tau$ は「真の時間」（下枠コラム参照）。

$\omega_0 = -c \dfrac{\partial \psi}{\partial x^0}$　　x^0 であらわした振動数。不変な重力場では、これは光が伝播していくあいだ一定。

$\omega = -\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x^0} \dfrac{\partial x^0}{\partial \tau} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}$　　固有時間であらわした振動数。g_{00} のちがいによって、これはことなってくる。

光の振動数は、重力場のポテンシャル（物体から遠く離れたところをゼロとすると、物体に近づくにつれて大きなマイナス値となっていく）の絶対値が増大するとともに、すなわち、場を生ずる物体に近づくにつれて大きくなることがわかる。逆に、光がこれらの物体から遠ざかると、振動数は減少する。
たとえば、太陽のうえの原子から放出される線スペクトルをその場でみると、地球の上で同じ原子が放出する線スペクトルをみたときと同じようにみえる。ところが、太陽上の原子から発せられたスペクトルを地球上でみると、その線を地球上で発せられた同じスペクトル線とくらべてずれてみえる。＝振動数は減少する → 赤方偏移。

Column //

一般相対性理論では、座標系の選択には本質的な制限はない。３つの空間座標 x^μ は、物体の空間内の位置をきめる量ならなんでもよいし、時間座標 x^0 は、どんな動き方をする時計によっても定義できる。
そこで、どのようにすれば、実際の距離と時間間隔を知ることができるのだろうか。

真の時間

問題にしている小領域に対して静止したガリレイ的な基準系になおしたとき、空間の同一点で生じる２つの事象のあいだの時間。
真の時間 $d\tau$（ガリレイ的なものになおしたときの固有時間。粒子とともに運動する標準時計で測った時間）
世界間隔 ds は、$cd\tau$ にほかならない。

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$

$dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ とおくと、

$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 = c^2 d\tau^2$

すなわち、真の時間　$d\tau = \dfrac{\sqrt{g_{00}}}{c}\, dx^0$

重力による赤方偏移

$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00} (dx^0)^2$

それぞれの時間ではかった周期を $\Delta\tau$、Δt とすれば、

$\Delta\tau^2 = g_{00}\Delta t^2$

静的な重力場の場合、Δt は光の伝播によって不変。

しかし、g_{00} は変化するので、$\Delta\tau$ は g_{00} によって影響をうけることになる。

標準時計の進み方は、その時計が置かれている場所におけるスカラー重力ポテンシャルに依存する。そして、巨大な物体の近く＝重力ポテンシャルが低くなるほど、進む速さも小さくなる。(巨大な物体の近くにいるほど、時間の進み方は遅くなる。重力ポテンシャルの低い惑星上では、重力ポテンシャルの高い宇宙空間に比べて時間がゆっくり進むことになる。例えば、地球上（正確には、ジオイド表面上）で 1 秒当たり 100 億分の 7 秒遅くなる。)

真の距離

$dl^2 = (-g_{\mu\nu} + \frac{g_{0\mu}\,g_{0\nu}}{g_{00}})\,dx^\mu dx^\nu$　　計算略

$\gamma_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{g_{0\mu}\,g_{0\nu}}{g_{00}}$　　$\gamma_{\mu\nu}$ は空間部分をあらわす計量テンソルのようなものとなる

同期化された基準系（$g_{00} = 1$、$g_{0\mu} = 0$　←つねにこのようにできる。等方モデルのときは同期化されている。）のときは、

$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -\gamma_{\mu\nu} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$

$-g = g_{00}\,\gamma$　　$\gamma = |\gamma_{\mu\nu}|$

曲線座標では、幾何学的な空間の体積要素は、$\sqrt{\gamma}\ dx^1dx^2dx^3$ であたえられる。

// End Column

再び、もとにもどって、ここでの最後に、マックスウェルの方程式について。

マックスウェルの方程式を特殊相対論の 4 次元形式にしたものは、すでに定式化しておいた。　page10 参照

$\mathrm{F}_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　　$(\partial_i = \partial/\partial x^i)$

$\partial_k \mathrm{F}_{ij} + \partial_i \mathrm{F}_{jk} + \partial_j \mathrm{F}_{ki} = 0$

$\partial_j \mathrm{F}^{ij} = -\frac{4\pi}{c}\,i^i$　　$\boldsymbol{i}^{(4)} = (c\rho,\ \boldsymbol{i})$　　両辺を ∂x^i で微分すると、$\frac{\partial i^i}{\partial x^i} = 0$ 保存則（F^{ij} は反対称だから）

一般相対論に移るには、この方程式を共変形に直さなければならない。

$\mathrm{F}_{ij} = A_{j:i} - A_{i:j} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　で同じ。　$\leftarrow A_{i:k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik}A_j$　page22

$\mathrm{F}_{ij:k} + \mathrm{F}_{jk:i} + \mathrm{F}_{ki:j} = \partial_k \mathrm{F}_{ij} + \partial_i \mathrm{F}_{jk} + \partial_j \mathrm{F}_{ki} = 0$　で同じ。　$\leftarrow F_{ij:k} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l{}_{ik}F_{lj} - \Gamma^l{}_{jk}F_{il}$、$F_{ij}$ は反対称

$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = -\frac{4\pi}{c}\,i^i$　はどうか。

$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j}$　　下の Calc.Corner 参照

$\frac{\partial(i^i\sqrt{-g})}{\partial x^i} = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^i\,\partial x^j} = 0$　（F^{ij} は反対称だから）

$i^i{}_{:i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(i^i\sqrt{-g})}{\partial x^i} = 0$　　下の Calc.Corner 参照

これは、電荷の保存則をあたえる。(空間の曲がりによって破られることなく、正確になりたっているのである。)

Calc.Corner

$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = \frac{\partial \mathrm{F}^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk}\mathrm{F}^{kj} + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{F}^{ik}$　　j、k につき $\Gamma^i{}_{jk}$ は対称、F^{kj} は反対称より、$\Gamma^i{}_{jk}\mathrm{F}^{kj} = 0$

$= \frac{\partial \mathrm{F}^{ij}}{\partial x^j} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}\mathrm{F}^{ik}$　　page26 公式参照

$$\therefore \quad \mathrm{F}^{ij}{}_{;j} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g}\,)}{\partial x^j}$$

$$i^i{}_{;i} = \frac{\partial i^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ji}\, i^j$$

$$= \frac{\partial i^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i}\, i^i$$

$$\therefore \quad i^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\, i^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i}$$

ニュートン近似

静的な重力場、静的な座標系を考える。（page45 コラム参照）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = 0 & g_{ij} \text{ は時間的に一定} \\ g_{\mu 0} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3) & x^0 \text{ を } -x^0 \text{ にかえても、} ds \text{ はかわらない} \end{cases}$$

（等方のときも $g_{\mu 0} = 0$ となる。また、どのような重力場でも、$g_{\mu 0} = 0$ とできる。）

$$g^{\mu 0} = 0$$
$$g^{00} = (g_{00})^{-1}$$
$$\Gamma_{\mu, 0\nu} = 0 \quad (\Gamma_{\mu, \nu 0} = 0)$$
$$\Gamma^{\mu}{}_{0\nu} = 0 \quad (\Gamma^{\mu}{}_{\nu 0} = 0)$$

光速にくらべて、ゆっくり動く質点を考える。

$v^{\mu} = \dfrac{dx^{\mu}}{ds}$　速度　v^0 に比べて、v^{μ} は小

$g_{00} v^0 v^0 \fallingdotseq 1$　$\leftarrow$　$g_{ij} v^i v^j = 1$ （$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$）

①運動方程式

$$\frac{dv^{\mu}}{ds} = -\Gamma^{\mu}{}_{ij} v^i v^j$$
$$\fallingdotseq -\Gamma^{\mu}{}_{00} v^0 v^0 = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} v^0 v^0$$
$$\frac{dv^{\mu}}{ds} = \frac{dv^{\mu}}{dx^0} \frac{dx^0}{ds} = \frac{dv^{\mu}}{dx^0} v^0$$
$$\frac{dv^{\mu}}{dx^0} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^{\nu}} v^0 = g^{\mu\nu} \frac{\partial \sqrt{g_{00}}}{\partial x^{\nu}}$$

こうして、質点があたかも $\sqrt{g_{00}}$ というポテンシャルのなかにいるかのように運動することがわかる。

加速度 $= -\,\mathrm{grad}\, V$

近似的に直角座標系にとってあれば、$g^{\mu\nu}$ の対角要素は、近似的に -1 となる。

②重力法則

重力場が弱くて、空間の曲率は小さいとする。

このとき $g_{ij} v^i v^j$ は、近似的に一定　$\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \to 0$

$R_{ij} = 0$ より $g^{\mu\nu} \dfrac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0$ が導ける。　説明略

スカラー場に対するダランベールの方程式 $g^{ij} V_{;i;j} = 0$ （$\square V = 0$ の共変形）

弱い場の近似　$g^{ij} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} = 0$

さらに静的な場合　$g^{\mu\nu} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0$

時間の単位を適当にとって、g_{00} を近似的に 1 にすることができる。

$g_{00} = 1 + 2V$　V は小さい

このようにすると、$\sqrt{g_{00}} = 1 + V$ となり、①、②ともにうまくいく。

こうして、弱くて、静的な重力場の場合は、ニュートンの法則に移行することがわかる。

リーマン時空での積分（ガウスの定理・ストークスの定理）

ここで扱う e^{ijkl} について

完全反対称で任意の添字の交換に対して符号をかえ、0 でない成分は ± 1 に等しい。 $e^{0123}=+1$ とすると（このとき $e_{0123}=-1$）、$i\,j\,k\,l$ が、偶数個の互換によって $0\,1\,2\,3$ になるか、奇数個の互換で $0\,1\,2\,3$ になるかに従って、$+1$ または -1 に等しい。このような成分の数は、$4!=24$ に等しい。したがって、$e^{ijkl}e_{ijkl}=-24$ 。

e^{ijkl} は、座標系の回転に対しては、テンソルのようにふるまうが、座標のうち 1 つまたは 3 つの符号をかえても（反転）、これは符号をかえない。テンソルはかえるので、擬テンソルとよばれる。

ミンコフスキー時空の積分

線積分　　dx^i

面積分　　$\boldsymbol{dx}$ 、$\boldsymbol{dx'}$ がはる面要素の $x^i x^j$ 座標面への射影面積

$$dS^{ij}= dx^i dx'^j - dx^j dx'^i = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i \\ dx^j & dx'^j \end{vmatrix} \qquad \text{反対称テンソル}$$

$$dS^{*ij}=\frac{1}{2}e^{ijkl}dS_{kl} \qquad dS^{ij}\ \text{の対偶テンソル。}$$

大きさが dS^{ij} に等しく、「法線」方向をむいた擬テンソル。

超面積分　$\boldsymbol{dx}$ 、$\boldsymbol{dx'}$ 、$\boldsymbol{dx''}$ がはる超面要素の $x^i x^j x^k$ 座標超面への射影「面積」

$$dV^{ijk}=\begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^j & dx'^j & dx''^j \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \end{vmatrix} \qquad \text{反対称テンソル}$$

$$dV^i=-\frac{1}{6}e^{ijkl}dV_{jkl} \qquad \text{テンソル}\ dV^{ijk}\ \text{に対偶な 4 元ベクトル。}$$

絶対値が超面要素の「面積」に等しく、法線方向をむいたベクトル。

体積積分　$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ 　　スカラー

ガウスの定理　　　「物理でつかう数学 / ガウスの定理とストークスの定理」参照

$$\oint A^i dV_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i}d\Omega \quad ① \qquad dV_i \rightarrow d\Omega\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\oint A^{ij}dS^*_{ij} = \int \left(dV_i\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j} - dV_j\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^i} \right) \quad ② \qquad dS^*_{ij} \rightarrow dV_i\frac{\partial}{\partial x^j} - dV_j\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$= 2\int dV_i\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^j} \qquad A^{ij}\ \text{は反対称}$$

ストークスの定理（線積分を面積分に変換する）

$$\oint A_i dx^i = \int dS^{ji}\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2}\int dS^{ji}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right) \quad dS^{ji}\ \text{は反対称} \quad ③ \qquad dx^i \rightarrow dS^{ji}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

リーマン時空での積分

$$dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \Longrightarrow J\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \qquad J = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots\cdots & & & \end{matrix} \right\| \qquad \text{2 重線は行列式＋絶対値}$$

のように変換する。　「物理でつかう数学 / 多重積分の変数変換とヤコビアン」参照

ここで、$\left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right|$ はヤコビアン　　ガリレイ座標では、$\left|\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right| = \pm 1$

$$\| g_{kl} \| = \left\| \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l} g'_{ij} \right\|$$

$g = J^2 g'$ 　　$g = | g_{ij} |$ 　ガリレイ座標では $g=-1$

$\sqrt{-g} = J\sqrt{-g'}$

S をスカラー（座標系に依存しない不変量 $S=S'$）とすれば、

$$\int S\sqrt{-g}\,d\Omega = \int S\,J\sqrt{-g'}\,d\Omega = \int S'\sqrt{-g'}\,d\Omega'$$

これは、$\int S\sqrt{-g}\,d\Omega$ が不変であることを意味している。（$S\sqrt{-g}$　スカラー密度）

ガリレイ座標系では、$d\Omega = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$ はスカラーであったが、曲線座標では $\sqrt{-g}\,d\Omega$ が不変量としてふるまう。

$\int T^{ij\cdots\cdots}\sqrt{-g}\,d\Omega$ は、テンソルになる。（$T^{ij\cdots\cdots}\sqrt{-g}$　テンソル密度）

ただし、積分領域が小さいときのみ。積分領域が小さくないと、テンソルにならない。

ガウスの定理

$\sqrt{-g}\;d\Omega$

$\sqrt{-g}\;dV_i = -\dfrac{1}{6}\sqrt{-g}\;e_{ijkl}\,dV^{jkl}$

$\sqrt{-g}\;dS^*_{ij} = \dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\;e_{ijkl}\,dS^{kl}$

dx^i

ストークスの定理

ガウスの定理（これらは後述）

$\int A^i_{\,:i}\sqrt{-g}\;d\Omega = \oint A^i\sqrt{-g}\;dV_i$　　④

$\int \mathrm{F}^{ij}_{\;\;:j}\sqrt{-g}\;dV_i = \dfrac{1}{2}\oint \mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g}\;dS^*_{ij}$　　⑤　　　$\mathrm{F}^{ij} = -\mathrm{F}^{ji}$　反対称

ストークスの定理（後述）

$\dfrac{1}{2}\int (A_{i:j} - A_{j:i})\,dS^{ij} = \oint A_i\,dx^i$　　⑥

以下、補論「ガウスの定理・ストークスの定理」参照

【反変ベクトル】

$A^i_{\,:i} = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{\,ji}A^j = \dfrac{\partial A^i}{\partial x^i} + \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i}A^i$　　　page29 Calc.Corner 参照

$\therefore\quad A^i_{\,:i} = \dfrac{1}{\sqrt{-g}}\dfrac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i}$

$\int S\sqrt{-g}\;d\Omega$ で S に $A^i_{\,:i}$ を代入すると、

$\int A^i_{\,:i}\sqrt{-g}\;d\Omega = \int\dfrac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i}\,d\Omega = \oint A^i\sqrt{-g}\;dV_i$

↑ ガウスの定理①

もし、$A^i_{\,:i} = 0$ ならば、

$\dfrac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i} = 0$ となり、これは保存則をあたえる。

すなわち、$(\underbrace{A^0\sqrt{-g}}_{密度}\,,\;\underbrace{A^\mu\sqrt{-g}}_{流束}\,)$ であたえられる流体が、保存されるということである。

実際、$\dfrac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i} = 0$ を、時刻 x^0 のきまった３次元体積 V 上で積分すれば、

$\dfrac{\partial\int_V A^0\sqrt{-g}\;dx\,dy\,dz}{\partial x^0} = -\int_V\dfrac{\partial(A^\mu\sqrt{-g}\,)}{\partial x^\mu}\,dx\,dy\,dz = -\oint A^\mu\sqrt{-g}\;dS_\mu$

V の境界を過ぎる流れがなければ、$\int A^0\sqrt{-g}\;dx\,dy\,dz$ は一定である。

【テンソル】

テンソルの場合はどうか。

平らな空間ならば、$\int Y^{ij}_{\;\;:j}\,dV_i$ はガウスの定理を使って、表面積分になおせるが、曲がった空間では、一般に、

$\int Y^{ij}_{\;\;:j}\sqrt{-g}\;dV_i$ を表面積分になおすことはできない。

その例外は、反対称テンソル $F^{ij} = -F^{ji}$ の場合である。

この場合には、

$$F^{ij}{}_{:j} = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk} F^{kj} + \Gamma^j{}_{jk} F^{ik}$$

page28 Calc.Corner 参照

$$= \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} F^{ik}$$

$$\therefore \quad F^{ij}{}_{:j} \sqrt{-g} = \frac{\partial (F^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j}$$

$$\int F^{ij}{}_{:j} \sqrt{-g}\, dV_i = \int \frac{\partial (F^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j} dV_i = \frac{1}{2} \oint F^{ij} \sqrt{-g}\, dS^*_{ij}$$

↑ ガウスの定理②

もし、$F^{ij}{}_{:j} = 0$ なら、保存則がなりたつことになるのである。

対称テンソル $Y^{ij} = Y^{ji}$ の場合

一方の添字をひきおろして、$Y_i{}^j{}_{:j}$ をあつかうことにすれば、似た式がかける。

$$Y_i{}^j{}_{:j} = \frac{\partial Y_i{}^j}{\partial x^j} - \Gamma_{k,ij} Y^{kj} + \Gamma^j{}_{jk} Y_i{}^k$$

page22　&　page19 第二種のクリストッフェル記号定義

$$= \frac{\partial Y_i{}^j}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} Y^{kj} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} Y_i{}^k$$

$Y^{ij} = Y^{ji}$、page19 ④ $\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki} = \dfrac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}$、page26 公式

$$\therefore \quad Y_i{}^j{}_{:j} \sqrt{-g} = \frac{\partial (Y_i{}^j \sqrt{-g})}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} Y^{kl} \sqrt{-g}$$

【共変ベクトル】

$$A_{i:j} - A_{j:i} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^k{}_{ij} A_k\right) - \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \Gamma^k{}_{ji} A_k\right)$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

つまり、共変カールが、ふつうのカールに等しい。このことは共変ベクトルにおいてのみ成りたつ。

ストークスの定理③より、

$$\frac{1}{2} \int (A_{i:j} - A_{j:i})\, dS^{ij} = \oint A_i\, dx^i$$

アインシュタインの方程式

アインシュタインの仮定　page25

からっぽの空間（物質も存在せず、重力場のほかには、どんな物理的な場も存在しないことを意味する）では、
$R^{ij}=0$ が成り立つ。　　重力の法則

この $R^{ij}=0$ は、$R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R=0$ と同等である。

g_{ij} をかけると、$R-\frac{1}{2}R=0$ で $R=0$

すなわち、$R^{ij}=0$ になる。

物質が存在するところでは、$R^{ij}=X^{ij}$ あるいは、$R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R=Y^{ij}$ としよう。

ビアンキの恒等式があるので、後者が便利だろう。

ビアンキの恒等式　$(R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R)_{:j}=0$

$Y^{ij}{}_{:j}=0$

係数をつけて、$R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R=8\pi Y^{ij}$ としておくのがよい。（後述）

こうしておくと、Y^{ij} は（非重力的な）エネルギーと運動量の密度ならびに流束と解釈される。

Y^{i0} が密度、$Y^{i\mu}$ が流束。

$Y^{ij}{}_{:j}=0$ は、平らな空間でのエネルギーと運動量の保存則 $\frac{\partial Y^{ij}}{\partial x^j}=0$ に対応している。

物質のエネルギー・運動量テンソル

ある物質分布があって、場所から場所へ速度 $v^i=\frac{dx^i}{ds}$ が<u>連続的に変わっている</u>とする。

スカラー ρ を導入して、ベクトル場 ρv^i が物質の密度と流束（特殊相対論的）をきめるようにすることができる。

これは、i^i（page28）と同様であって、一般相対論では、$\rho v^0\sqrt{-g}$ が物質の密度、$\rho v^\mu\sqrt{-g}$ が流束になる。

物質の保存は、$\frac{\partial(\rho v^i\sqrt{-g})}{\partial x^i}=0$ または、$(\rho v^i)_{:i}=0$ により、あらわせる。（page28）

$(\rho v^i)_{:i}=0$ より、

$\rho_{:i}v^i+\rho v^i{}_{:i}=0$

$\frac{\partial\rho}{\partial s}=\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial s}=\frac{\partial\rho}{\partial x^i}v^i=\rho_{:i}v^i=-\rho v^i{}_{:i}$　　　page22 スカラー S の場合は、$S_{:k}=\frac{\partial S}{\partial x^k}$

これは、ρ が世界線にそって、どうかわるかきめる。

物質のエネルギー・運動量テンソル　　補論「エネルギー・運動量テンソル」参照

$T^{ij}=\rho v^i v^j$　　対称

$T^{ij}\sqrt{-g}$ が、エネルギーおよび運動量の密度と流束をあたえる。

$$
\begin{array}{cc}
\text{エネルギー密度} & \text{エネルギーの流束} \\
\left(\begin{array}{c} \rho v^0 v^0\sqrt{-g} \\ \boxed{\rho v^\mu v^0\sqrt{-g}} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \boxed{\rho v^0 v^\nu\sqrt{-g}} \\ \boxed{\rho v^\mu v^\nu\sqrt{-g}} \end{array}\right) \\
\text{運動量の密度} & \text{運動量の流束}
\end{array}
$$

$T^{ij}{}_{:j}=0$

$\because$　$T^{ij}{}_{:j}=(\rho v^i v^j)_{:j}=(\rho v^j)_{:j}v^i+\rho v^j v^i{}_{:j}$　　　$(\rho v^j)_{:j}=0$

$\qquad=\rho v^j v^i{}_{:j}$

ここで、v^i は 1 本の世界線で意味をもつだけでなく、さらに、連続的な場として定義されているため、

$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk} v^j v^k = 0$（測地線 page21）　かつ　$dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j$（場所から場所へと変化する連続的な場）

$$\frac{dv^i}{ds} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} v^j$$

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk} v^k\right) v^j = 0$$

$$v^i{}_{:j} v^j = 0$$

page22

$T^{ij}{}_{:j} = 0$ なので、アインシュタインの方程式（物質が存在するとき）を、

$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = k T^{ij}$ とできる。

係数 k をきめよう。ニュートン近似をつかう。

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = k \rho v^i v^j$$

g_{ij} をかけ縮約すると、$g_{ij} v^i v^j = 1$ ($ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$) および $g^i_i = 4$ より、(page17)

$$-R = k\rho$$

このため、上の式は、

$$R^{ij} = k\rho\left(v^i v^j - \frac{1}{2} g^{ij}\right)$$

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^m{}_{ij}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m{}_{im}}{\partial x^j} + \Gamma^k{}_{ij}\Gamma^m{}_{km} - \Gamma^k{}_{im}\Gamma^m{}_{kj}$$

page25

$$= -\frac{1}{2} g^{mn}\left(\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^m \partial x^n}\right) = k\rho\left(v_i v_j - \frac{1}{2} g_{ij}\right)$$

以下の式を代入し、$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ などの 2 項積は、すべて近似的に 0 とした。

$$\Gamma^m{}_{ij} = g^{mn}\Gamma_{n,ij} = \frac{1}{2} g^{mn}\left(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{nj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n}\right)$$

$$\Gamma^m{}_{im} = \frac{1}{2} g^{mn}\left(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x^n}\right)$$　1 項と 3 項は打ち消しあう

$$= \frac{1}{2} g^{mn} \frac{\partial g_{nm}}{\partial x^i}$$

すべて静止した静的場を考え、弱い場の近似をとる。$v^0 = 1$ 、$v^\mu = 0$ 。

さらに、$i = j = 0$ とすると、

上の式 $-\frac{1}{2} g^{mn}\left(\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^m \partial x^n}\right) = k\rho\left(v^i v^j - \frac{1}{2} g^{ij}\right)$ は、

$$-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = k\rho\left(v^0 v^0 - \frac{1}{2} g^{00}\right) = \frac{1}{2} k\rho$$

$g_{00} = 1 + 2V$ とおいてみると、　page30

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{1}{2} k\rho$$

ポアッソン方程式 $\Box\phi = -4\pi\rho$　近似的に $g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -4\pi\rho$

比較して、$k = 8\pi$

すなわち、アインシュタインの方程式は、

$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = 8\pi \rho v^i v^j$ となる。

逆に、$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = 8\pi \rho v^i v^j$ を仮定すると、

① 質量の保存

② 質量が測地線にそって動くこと

が導ける。

$(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R)_{:j} = 0$ だから、

$(\rho v^i v^j)_{:j} = 0$

$(\rho v^j)_{:j} v^i + \rho v^j v^i{}_{:j} = 0$ ―――――――― ※

v_i をかけると、$(\rho v^j)_{:j} = 0$ 　質量保存

$\because$ $g_{ij} v^i v^j = 1$ $(ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j)$ 　より、

$v^i v_i = 1$

$v_i v^i{}_{:k} = 0$ 、$v^i v_{i:k} = 0$

$\because$ $(g_{ij} v^i v^j)_{:k} = 0$ 、$g_{ij:k} = 0$ だから、

$2 g_{ij} v^i v^j{}_{:k} = 0$

また、これと ※ から、

$v^j v^i{}_{:j} = 0$

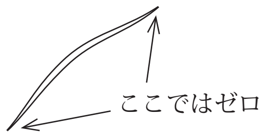
$v^j (\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk} v^k) = 0$ 　　$v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{dx^j}{ds} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{dv^i}{ds}$

$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i{}_{jk} v^j v^k = 0$

重力場に対する作用関数

電磁場と同じく、$\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ の形をしているはずである。また、重力場の方程式は、電磁場と同じように、場のポテンシャルの２階より高い導関数を含んではならないという事実をとる。作用の変分をとって（δS）、このような方程式を得るためには、スカラー G は g_{ij} の１階より高い導関数を含まないことが必要である。したがって、G は g_{ij} と $\Gamma^i{}_{jk}$ だけを含むことになる。しかしながら、これだけから不変量をつくることは不可能である。ところが、R というスカラーがあって、これは、２階の導関数をも含んではいるけれども、次のようにして、２階の導関数を変分に対して消すことができる。

$S = \int R\sqrt{-g}\,d\Omega$　　スカラー



最小作用の原理では、積分領域の限界における場の変分はゼロ。
積分境界では、g_{ij} もその１階微分も変化させないような、任意の変分 δg_{ij} に対して $\delta S = 0$ なら、アインシュタインの真空方程式 $R_{ij} = 0$ がでてくる。

証明

$R = g^{ij}R_{ij} = R^* - G^*$

$R^* = -g^{ij}\left(\dfrac{\partial\Gamma^m{}_{im}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial\Gamma^m{}_{ij}}{\partial x^m}\right)$　　２階微分を含む

$G^* = -g^{ij}(\Gamma^m{}_{ij}\Gamma^n{}_{mn} - \Gamma^m{}_{in}\Gamma^n{}_{jm})$　　１階微分

$$R^*\sqrt{-g} = -\frac{\partial(g^{ij}\Gamma^m{}_{im}\sqrt{-g})}{\partial x^j} + \frac{\partial(g^{ij}\Gamma^m{}_{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^m} + \frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j}\Gamma^m{}_{im} - \frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^m}\Gamma^m{}_{ij}$$

最初の２項は、表面積分に直されて、変分に対して消える。
後の２項は、下の Calc.Corner の式を用いて、

$$= -g^{jn}\Gamma^i{}_{nj}\Gamma^m{}_{im}\sqrt{-g} - (-2g^{jn}\Gamma^i{}_{nm} + g^{ij}\Gamma^n{}_{mn})\Gamma^m{}_{ij}\sqrt{-g}$$

$$= 2G^*\sqrt{-g}$$

$\therefore\quad \delta S = \delta\int G^*\sqrt{-g}\,d\Omega$

$L = G^*\sqrt{-g}$　　１階微分についての斉次２次

計算が長くなるので省くが、

$$\delta L = -\Gamma^m{}_{ij}\,\delta\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^m} + \Gamma^n{}_{mn}\,\delta\frac{\partial(g^{mj}\sqrt{-g})}{\partial x^j} - (\Gamma^n{}_{im}\Gamma^m{}_{jn} - \Gamma^n{}_{mn}\Gamma^m{}_{ij})\,\delta(g^{ij}\sqrt{-g})$$

最初の２項は、上と同じように形をかえると、結局、

$\delta S = \int R_{ij}\,\delta(g^{ij}\sqrt{-g})\,d\Omega$ となる。　　$R_{ij} = \dfrac{\partial\Gamma^m{}_{ij}}{\partial x^m} - \dfrac{\partial\Gamma^m{}_{im}}{\partial x^j} + \Gamma^n{}_{mn}\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^n{}_{im}\Gamma^m{}_{jn}$

$\delta(g^{ij}\sqrt{-g})$ は任意だから、$R_{ij} = 0$

さらに、計算をつづけると、

$\dfrac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g\,g^{ij}$ 、$\dfrac{\partial g}{\partial g^{ij}} = -g\,g_{ij}$（page26 公式）より、　$\delta\sqrt{-g} = \dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ij}\,\delta g_{ij} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ij}\,\delta g^{ij}$

$$\delta S = \int R_{ij}\,\delta(g^{ij}\sqrt{-g})\,d\Omega$$

$$= \int R_{ij}\,(\delta g^{ij}\sqrt{-g} + g^{ij}\delta\sqrt{-g})\,d\Omega$$

$$= \int (R_{ij}\,\delta g^{ij}\sqrt{-g} + R\,\delta\sqrt{-g})\,d\Omega$$

$$= \int \left(R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{ij}\,d\Omega$$

$\delta S = 0$ なら $R_{ij} - \dfrac{1}{2}g_{ij}R = 0$

$$\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}\sqrt{-g} + g^{ij}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

$$= g^{in}g^{jn}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\sqrt{-g} + g^{ij}\Gamma^l{}_{kl}\sqrt{-g} \qquad \Gamma^i{}_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}$$ page26 公式

$$= \{-g^{im}g^{jn}(\Gamma_{m:nk} + \Gamma_{n:mk}) + g^{ij}\Gamma^l{}_{kl}\}\sqrt{-g}$$ page19 ④

$$= (-g^{jn}\Gamma^i{}_{nk} - g^{im}\Gamma^j{}_{mk} + g^{ij}\Gamma^l{}_{kl})\sqrt{-g}$$

k を j とおいて縮合させると、後者２項は打ち消しあって 0 となる。

$$\frac{\partial(g^{ij}\sqrt{-g})}{\partial x^j} = -g^{jn}\Gamma^i{}_{nj}\sqrt{-g}$$

重力場と他のさまざまな場の作用関数（アインシュタインの方程式の一般形）

任意の場が、任意の数だけあって、重力場と相互作用し、お互いどうし相互作用しているとき、
一般的な作用原理　$\delta S = \delta(S_g + S') = 0$ がたてられる。　S_g は重力場、S' は他のすべての作用

$$\delta S_g = \delta\int L\, d\Omega \qquad L = R\sqrt{-g}$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int\left(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\right)\sqrt{-g}\;\delta g_{ij}\, d\Omega$$

$\delta S' = \delta\int L'\, d\Omega$　　L' は q と $\dfrac{\partial q}{\partial x^i}$、場合によっては、より高次の微分を含む関数である。（q は何個かある。）

$\delta S = \int\left(P^{ij}\delta g_{ij} + Q\delta q\right)\sqrt{-g}\; d\Omega$　という形になる。

$\delta S = 0$　より、
$P^{ij} = 0$
$Q = 0$　　場の方程式　※

P^{ij} は S_g からくる $R^{ij} - \dfrac{1}{2}g^{ij}R$ の項と、L' からくる項の和である。
後者を N^{ij} とおけば、ふつう L' は g^{ij} の微分を含まないから、

$$N^{ij} = \frac{\partial L'}{\partial g_{ij}}$$

こうして、$R^{ij} - \dfrac{1}{2}g^{ij}R - 16\pi N^{ij} = 0$　　アインシュタインの重力場の方程式の一般形
すなわち、それぞれの場が、自分の作用に g_{ij} が含まれるその仕方に応じて、アインシュタインの方程式に一項を寄与するというわけである。
ビアンキの恒等式により、$N^{ij}{}_{:j} = 0$
この関係式があるので、上の ※ という場の方程式がすべて独立というわけにはいかない。

電磁場の作用

一般相対論における電磁場の作用は、（特殊相対論で $\dfrac{1}{16\pi}\int \mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}d\Omega$ より）

$S = \dfrac{1}{16\pi}\int \mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\sqrt{-g}\, d\Omega$　とすべきだろう。　F_{ij} は反対称

$\mathrm{F}_{ij} = A_{j:i} - A_{i:j} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　（$\partial_i = \partial/\partial x^i$）だから、$S$ は g_{ij} と A_i の微分との汎関数である。

まず、A_i を一定にして、δg_{ij} 変分をとる。このとき F_{ij} は変わらないが、F^{ij} は変わる。

$$\delta\left(\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\sqrt{-g}\right) = \left(\frac{1}{2}\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}g^{mn} - 2\mathrm{F}^{m}{}_{j}\mathrm{F}^{jn}\right)\sqrt{-g}\;\delta g_{mn} \qquad \text{計算略}$$

$$= -8\pi E^{mn}\sqrt{-g}\;\delta g_{mn}$$

$$E^{mn} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{F}^{m}{}_{j}\mathrm{F}^{jn} - \frac{1}{4}g^{mn}\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\right) \qquad \text{対称}$$

E^{mn} は、電磁場の応力エネルギーテンソル

つぎに、g_{ij} を固定しておき、δA_i をとる。

$$\delta\left(\mathrm{F}_{ij}\mathrm{F}^{ji}\sqrt{-g}\right) = 2F^{ji}\sqrt{-g}\;\delta F_{ij}$$

$$= 4F^{ji}\sqrt{-g}\;\delta\frac{\partial A_j}{\partial x^i} \qquad \text{部分積分をつかって変形}$$

$$= 4\frac{\partial\left(F^{ji}\sqrt{-g}\;\delta A_j\right)}{\partial x^i} - 4\frac{\partial\left(F^{ji}\sqrt{-g}\right)}{\partial x^i}\delta A_j$$

最初の 1 項は、表面積分に直されて、
変分に対して消える。

$$= -4F^{ji}{}_{:i}\sqrt{-g}\;\delta A_j$$

page28

２つを加えれば、変分、δg_{ij} 、δA_i による全体の変分が得られる。

$$\delta S = \int (-\frac{1}{2} E^{mn}\sqrt{-g}\,\delta g_{mn} - \frac{1}{4\pi} F^{ij}{}_{:j}\sqrt{-g}\,\delta A_i\,)\,d\Omega$$

物質が連続的に分布している場合の作用

物質の連続的な分布を考え、その速度が場所から場所へと連続的に変わっているとする。（page34 参照）

$$\delta S = \delta(\underset{\text{重力部分}}{S_g} + \underset{\text{物質部分}}{S_m}) = 0$$

これが、重力場に対しては、アインシュタインの方程式（物質が存在する場合の）を与え、物質に対しては、運動の測地線方程式を与える。

各点の速度ベクトル　$v^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial s}$

v^i の方向にあって、流量と流速をきめる反変ベクトル　$p^i = \rho v^i\sqrt{-g}$　（ρ はスカラー　$\rho = n_0 m_0$ みたいなもの）

↑ page34 参照

$S_m = -\iint P^0\,dV\,ds$　　1 個の粒子　$S_m = -m_0\int ds$　　m_0 のかわりに P^0dV がくる。

$= -\iint \rho v^0\sqrt{-g}\,dV\,ds$　　$v^0\,ds = dx^0$

$= -\int \rho\sqrt{-g}\,d\Omega$

$= -\int \sqrt{p^i p_i}\,d\Omega$　　$g_{ij}v^i v^j = 1$（$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$）より　$v^i v_i = 1 \to \sqrt{p^i p_i} = \rho\sqrt{-g}$

$\delta S_m = -\int \delta\sqrt{p^i p_i}\,d\Omega$　　$\delta\sqrt{p^i p_i} = \dfrac{1}{2\sqrt{p^k p_k}}(p^i p^j\delta g_{ij} + 2p_i\delta p^i) = \dfrac{1}{2}\rho v^i v^j\sqrt{-g}\,\delta g_{ij} + v_i\delta p^i$

$= -\int (\dfrac{1}{2}\rho v^i v^j\sqrt{-g}\,\delta g_{ij} + v_i\delta p^i)\,d\Omega$

$\delta S_g = \dfrac{1}{16\pi}\int (R^{ij} - \dfrac{1}{2}g^{ij}R)\sqrt{-g}\,\delta g_{ij}\,d\Omega$

$\delta S = 0$　より、

$-\dfrac{1}{16\pi}(R^{ij} - \dfrac{1}{2}g^{ij}R) + \dfrac{1}{2}\rho v^i v^j = 0$　　アインシュタインの方程式

ビアンキの恒等式より、

$(\rho v^i v^j)_{:j} = 0$

$v^i(\rho v^j)_{:j} + \rho v^j v^i{}_{:j} = 0$　　両辺に v_i をかけると、$v^i v_i = 1$ 、$v^i v_{i:k} = 0$ より、

$(\rho v^j)_{:j} = 0$　　質量保存則

再び、$v^i(\rho v^j)_{:j} + \rho v^j v^i{}_{:j} = 0$ より、

$v^i{}_{:j}v^j = 0$　　測地線の式（page35）

これは、$-\int v_i\delta p^i\,d\Omega$ からもでてくる。

δS_m は、物質の流れを少し変えることによって得られるものであるから、物質素片のおのおのが、$z^i \to z^i + \varepsilon^i$ へ微小な ε^i だけずれるとしよう（z は座標）。

すると、$\delta p^i = \partial_j(p^j\varepsilon^i - p^i\varepsilon^j)$　　コラム参照 page42

δS_m の一部 $= -\int v_i\delta p^i\,d\Omega$

$= -\int v_i\partial_j(p^j\varepsilon^i - p^i\varepsilon^j)\,d\Omega$　　部分積分をつかって変形すると、

$= -\int [\partial_j\{v_i(p^j\varepsilon^i - p^i\varepsilon^j)\} - \partial_j v_i(p^j\varepsilon^i - p^i\varepsilon^j)]\,d\Omega$

↑表面積分で消える

$$= \int \partial_j v_i (p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j) d\Omega$$

$$= \int (\partial_j v_i - \partial_i v_j) p^j \varepsilon^i d\Omega$$

$$= \int (v_{i:j} - v_{j:i}) p^j \varepsilon^i d\Omega$$ page33 共変ベクトル参照

$$= \int v_{i:j} p^j \varepsilon^i d\Omega \qquad v_{j:i} v^j = 0$$ page36

$$= \int v_{i:j} \rho v^j \varepsilon^i \sqrt{-g}\, d\Omega$$

$= 0$ 　より、 $v^i_{:j} v^j = 0$ 　　測地線

粒子1個

$$\delta S_m = -m_0 \delta \int_a^b ds \qquad ds = \sqrt{dz_i dz^i}$$ z^i は座標

$$\delta ds = \frac{1}{2} \frac{\delta (dz_i dz^i)}{ds} = \frac{dz_i d\delta z^i}{ds} + \frac{dz^i dz^i}{2ds} \delta g_{ij} = u_i d\delta z^i + \frac{u^i dz^j}{2} \delta g_{ij}$$

$$\delta S_m = -m_0 \int_a^b \left(u_i d\delta z^i + \frac{u^i dz^j}{2} \delta g_{ij} \right)$$

$$\int u_i d\delta z^i = [u_i \delta z^i]_a^b - \int \delta z^i \frac{du_i}{ds} ds$$ 部分積分をつかって変形

↑消える

$$= m_0 \int \frac{du_i}{ds} \delta z^i ds - m_0 \int \frac{u^i dz^j}{2} \delta g_{ij}$$

$\delta S = \delta (S_g + S_m) = 0$ の δz^i 項に関して、

$$\therefore \quad \frac{du_i}{ds} = 0$$

電荷をもつ物質の場合の作用

1個の粒子の場合、$S_{mf} = -e \int A_i v^i ds$ であるが、電荷をになうものが点状の粒子だとすると、電場に特異点が生じ、困難が多いため、電荷をになう物質が、連続的に分布している場合を考える。（前項にのべたのと同じ。）

（ p^i と同じように）電荷の密度、流れをあらわす j^i を導入する。

$$\delta j^i = \partial_j (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j) \qquad j^i = \sigma v^i \sqrt{-g} \qquad v^i = \frac{\partial z^i}{\partial s}$$ スカラー $\sigma = n_0 e$ のようなもの

$$\delta S_{mf} = -\delta \iint j^0 A_i v^i dV ds$$

$$= -\delta \int \sigma v^0 A_i v^i \sqrt{-g}\, dV ds$$

$$= -\delta \int \sigma A_i v^i \sqrt{-g}\, d\Omega$$

$$= -\delta \int A_i j^i d\Omega$$

$$= -\int (\delta A_i j^i + A_i \delta j^i) d\Omega$$

$$\int A_i \delta j^i d\Omega = \int A_i \partial_j (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j) d\Omega$$

$$= \int [\partial_j \{A_i (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j)\} - \partial_j A_i (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j)] d\Omega$$

$$= -\int \partial_j A_i (j^j \varepsilon^i - j^i \varepsilon^j) d\Omega$$

$$= -\int (A_{i:j} - A_{j:i}) j^j \varepsilon^i d\Omega$$

$$= -\int \mathrm{F}_{ji} j^j \varepsilon^i d\Omega$$

$$= -\int (\delta A_i j^i - \mathrm{F}_{ji} j^j \varepsilon^i) d\Omega$$

系全体　$\delta S = \delta(\underset{\text{重力場}}{S_g} + \underset{\text{物質}}{S_m} + \underset{\text{電磁場}}{S_f} + \underset{\text{電荷（電磁場との相互作用）}}{S_{mf}}) = 0$

δg_{ij} の項に関しては、

$$-(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R) + 8\pi\rho v^i v^j + 8\pi E^{ij} = 0$$

↑物質のエネルギーテンソル

↑電磁場の応力エネルギーテンソル

δA_i の項は、$-j^i - \frac{1}{4\pi}F^{ij}{}_{:j} = 0$

$\therefore\quad F^{ij}{}_{:j} = -4\pi j^i$　　マックスウェルの方程式

ε^i の項は、$\rho v_{i:j} v^j + F_{ji} j^j = 0$

これは、ローレンツ力であって、これが物質素片の軌跡を測地線からそらせることがわかる。

これは、ビアンキの恒等式をつかって、δg_{ij} の項からもでてくる。　$(\rho v^i v^j + E^{ij})_{:j} = 0$

このことは、作用原理からでてくる方程式が、全部は独立ではないことを意味している。

Column //

$\delta p^i = \partial_j(p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j)$　について（ディラックの考察）

$p^0 dx^1 dx^2 dx^3$ は、ある時刻に体積要素 $dx^1 dx^2 dx^3$ のなかにある物質の量をあらわす。

$p^1 dx^0 dx^2 dx^3$ は、時刻 dx^0 のあいだに面積要素 $dx^2 dx^3$ を通過して流れる物質の量。

物質は保存されるので、$\partial_i p^i = 0$　　$p^i = \rho v^i \sqrt{-g}$

$z^i \to z^i + \varepsilon^i$ としたとき、各点 z^i の p^i はどのようにかわるであろうか。

最初、$\varepsilon^0 = 0$ としてみる。

ある３次元体積 V に含まれる物質量の増加は、V の境界を通過してずれでた量の符号を変えれば得られる。

つまり、$\delta \int_V p^0 dV = -\int p^0 \varepsilon^\mu dS_\mu$　　dS_μ は、V の境界面積素片　　$\mu = 1、2、3$

この右辺を、ガウスの定理（補論「ガウスの定理とストークスの定理」参照）によって体積積分に直せば、

$\delta p^0 = -\partial_\mu(p^0 \varepsilon^\mu)$

これを $\varepsilon^0 \neq 0$ の場合まで一般化してみる。

それには、「もし、ε^μ が p^μ に比例していたら物質素片はそれぞれの世界線にそってずれるだけであり、したがって p^μ は変わらない」という条件を利用する。

すると、$\delta p^0 = \partial_\mu(p^\mu \varepsilon^0 - p^0 \varepsilon^\mu)$

というのは、これは $\varepsilon^0 = 0$ のとき $\delta p^0 = -\partial_\mu(p^0 \varepsilon^\mu)$ に一致し、他方 ε^μ が p^μ に比例しているとき $\delta p^0 = 0$ をあたえるからである。

他の成分についても同様に考えると、$\delta p^i = \partial_j(p^j \varepsilon^i - p^i \varepsilon^j)$

// End Column

重力波

からっぽの空間のなかで、重力場が弱く、g_{ij} がほとんど一定という領域を考える。

$$-R_{kl} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^l \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} \right) = 0$$

調和座標を使うことにする。（下欄参照）

$g^{ij} \Gamma^a{}_{ij} = 0$

a を下に下げ、$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$ より、

$$g^{ij} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = 0$$

これを x^l で微分し、微分について２次の項を省略するなら、

$$g^{ij} \left(\frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \right) = 0$$

これと、i と j 、k と l を交換したものと、上の $-R_{kl} = 0$ の式を加えると、

$g^{ij} \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} = 0$ を得る。

つまり、各 g_{kl} が、ダランベールの方程式をみたす。
その解は、光速で伝播する波動からなる。これが、重力波にほかならない。

調和座標

スカラー場 V に対するダランベールの方程式（波動方程式）$\Box V = 0$ の共変な形は、$g^{ij} V_{;i;j} = 0$ である。

これは、$g^{ij} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k{}_{ij} \frac{\partial V}{\partial x^k} \right) = 0$

もし、空間が平らで、直線座標を使っているなら、各座標 x^a は $\Box x^a = 0$ を満たす。
これを、上の式に入れてみると、
$g^{ij} \Gamma^a{}_{ij} = 0$ となる。

これは特別な座標でなりたつだけであり、いいかえると、この方程式は、座標系を制限する条件になる。この座標系は、曲がった空間では、直線座標系にもっとも近いものである。あまり使って便利な場合はないが、重力波をあつかう場合には、非常に役立つ。

シュヴァルツシルトの解

からっぽの空間に対するアインシュタイン方程式が、すでに非線形であって、いりくんでおり、容易には解が得られない。しかし、ひとつだけ特別な場合があって、わりと簡単に解がだせる。それは、静止した球対称な物体がつくる静的で球対称な場である。

静的という条件は、静的な座標系を使えば、g_{ij} が時間 x^0（すなわち t）によらず、また $g_{0\mu} = 0$ （$\mu = 1, 2, 3$）になるということである。（以下の展開を含めてコラム参照）

空間座標を極座標 $x^1 = r$ 、$x^2 = \theta$ 、$x^3 = \varphi$ とする。
球対称と両立するもっとも一般的な ds^2 の形は、
$ds^2 = U\,dt^2 - V\,dr^2 - W\,r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$ である。ただし、U 、V 、W は r のみの関数とする。
ところで、座標 r であるが、これは r のどんな関数に置きかえても球対称をこわすことはない。この自由度を利用して事柄をできるだけ簡単にする。
もっとも便利なのは、$W = 1$ とすることである。すると、
$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$ 　　ν 、λ は r のみの関数

g_{ij} の値をこれから読みとると、
$g_{00} = e^{2\nu}$ 、$g_{11} = -e^{2\lambda}$ 、$g_{22} = -r^2$ 、$g_{33} = -r^2\sin^2\theta$
そして、$g_{ij} = 0$ 　（ $i \neq j$ に対し）
したがって、
$g^{00} = e^{-2\nu}$ 、$g^{11} = -e^{-2\lambda}$ 、$g^{22} = -r^{-2}$ 、$g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta$
そして、$g^{ij} = 0$ 　（ $i \neq j$ に対し）

クリストッフェル記号を計算すると、その多くは 0 になる。0 にならないのは、
（ r による微分をダッシュで表し、$\Gamma^k{}_{ij} = \Gamma^k{}_{ji}$ の一方のみを書く。）
$\Gamma^1{}_{00} = \nu' e^{2\nu-2\lambda}$ 、$\Gamma^0{}_{10} = \nu'$ 、$\Gamma^1{}_{11} = \lambda'$ 、$\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^3{}_{13} = r^{-1}$
$\Gamma^1{}_{22} = -r\,e^{-2\lambda}$ 、$\Gamma^3{}_{23} = \cot\theta$ 、$\Gamma^1{}_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-2\lambda}$ 、$\Gamma^2{}_{33} = -\sin\theta\cos\theta$

リッチテンソルは、

$R_{00} = (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \dfrac{2\nu'}{r})e^{2\nu-2\lambda}$

$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \dfrac{2\lambda'}{r}$

$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1$
$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta$
R_{ij} の他の成分は、0 である。

からっぽの空間では、$R_{ij} = 0$ だから、
$R_{00} = 0$ 、$R_{11} = 0$ より、$\lambda' + \nu' = 0$
ところが、r の大きいところでは空間は近似的に平らになるはずであるから、λ も ν も $r \to \infty$ でゼロに近づく。
したがって、$\lambda + \nu = 0$
すると、$R_{22} = 0$ より、$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1$
すなわち、$(re^{2\nu})' = 1$
したがって、$re^{2\nu} = r - 2m$ 　　m は積分定数
こうして、$g_{00} = 1 - \dfrac{2m}{r}$

r の大きいところでは、ニュートン近似がなりたつはずである。
これを「ニュートン近似」（page30）でみた $g_{00} = 1 + 2V$ と比べてみると、m は、中心にあって重力場をつくりだしている質量とみなすべきであることがわかる。

解をすっかり書き下せば、

$ds^2 = (1 - \dfrac{2m}{r})dt^2 - (1 - \dfrac{2m}{r})^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$ 　　Schwarzschild の解

これは、物質のないところ、すなわち重力場をつくりだす物体の外側でなりたつもので、星の表面から外の重力場をかなり正確に表す。例えば、太陽に最も近い水星の運動が、ニュートン理論からわずかにずれることをみごとに説明する。

Column //

中心に集中した質量がつくりだす静的で球対称な重力場　――――――

原点から無限遠に離れていくとミンコフスキー時空になるので、まず、重力場がない場合の直交座標でのメトリック（計量テンソル）と線素（不変間隔）は、

$(g_{ij})=(1, -1, -1, -1)$　　対角成分表示

$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

これを極座標表示にすると、

$(g_{ij}) = (1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2\theta)$

$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$　　$x^0 = ct,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$

次に、重力場がある場合はどうなるか。

《静的であるとは》

時間独立であると同時に時間反転に対しても不変であることを意味する。時間反転 $dx^0 \Rightarrow -dx^0$ のもとで不変であるという条件をつけることで、線素において dt と他の成分が混ざるような部分は 0 にならなければならないという制限がかかり、g_{i0} は 0 になる。

《球対称とは》

$d\theta, d\varphi$ は立体角部分をあらすようになっており、なおかつ角度を $d\theta \Rightarrow -d\theta$、$d\varphi \Rightarrow -d\varphi$ のようにしても線素は不変でなければならない。したがって、$d\theta d\varphi, d\theta r d$ のような項がでてきてはならないことになり、これらから計量テンソルは対角成分のみになる。

こうして静的かつ球対称ということから、重力場がある場合でもメトリック成分は対角成分のみになり、r だけの関数にできる。

$(g_{ij}) = (A(r), -B(r), -C(r)\, r^2, -D(r)\, r^2 \sin^2\theta)$　　A, B, C, D は r の関数

$ds^2 = A c^2 dt^2 - (B\, dr^2 + C r^2 d\theta^2 + D r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2)$

C, D は等方性（回転変換に対して変化しない）によって同じものになる（$\theta = 0$ と $\theta = \pi/2$ で対応がとれる）。

$ds^2 = A c^2 dt^2 - B\, dr^2 - C(r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2)$

さらに、動径 r の選択によって $C = 1$ という状況をつくることができる。

（$r' = C^{1/2} r$ とおいてみると、$B\, dr^2 = B' dr'^2$ となる。）

あらたに書きなおして、

$ds^2 = A c^2 dt^2 - B\, dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

ここで残っている未知関数 $A = e^{2\nu(r)}$、$B = e^{2\lambda(r)}$ をのようにする。計量テンソルの符号の関係 A、B は正なのでこのように置いて問題ない。

$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$

// End Column

ブラック・ホール

シュヴァルツシルトの解　$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$　は、$r = 2m$ に特異点をもつ。そこでは、$g_{00} = 0$ 、$g_{11} = \pm\infty$ となるのである。m は、重力場をつくりだしている中心に集中した質量である＝とみなせた。では、$r = 2m$ の r は、どのような特異点（境界）といえるのであろうか。

シュヴァルツシルト場で中心の物体に向かって一直線に落下する質点を考えてみる。　前節参照

その速度ベクトルを $v^i = \frac{dx^i}{ds}$ とする。一直線に落下するので、$v^2 = v^3 = 0$ 。

質点の運動は、測地線の式で決定されるので、

$$\frac{dv^0}{ds} = -\Gamma^0{}_{ij} v^i v^j$$

$$= -g^{0l}\Gamma_{l,ij} v^i v^j = -g^{00}\Gamma_{0,ij} v^i v^j = -g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} v^0 v^1 = -g^{00}\frac{dg_{00}}{ds} v^0$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = g^{il}\Gamma_{l,jk}$$

g_{ij} が時間 x^0 によらず、また $g_{0\mu} = 0$ 、$g^{0\mu} = 0$ （$\mu = 1, 2, 3$）

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$$

$$\frac{dg_{00}}{ds} = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} v^i = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} v^0 + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} v^1 = \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} v^1 \quad \leftarrow \quad v^2 = v^3 = 0$$

$g^{00} = \frac{1}{g_{00}}$ （$g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i$ より）なので、

$$g_{00}\frac{dv^0}{ds} + \frac{dg_{00}}{ds} v^0 = 0$$

積分すると、$g_{00} v^0 = k$ 　　k は定数で、質点が落ちはじめるときの g_{00} の値に等しい。

g_{00} は対角的であり（前節参照）、$v^2 = v^3 = 0$ だから、

$1 = g_{ij} v^i v^j = g_{00} v^0 v^0 + g_{11} v^1 v^1$

これに g_{00} をかけ、前節の $\lambda + \nu = 0$ 、$g_{00} = e^{2\nu}$、$g_{11} = -e^{2\lambda} \rightarrow g_{00} g_{11} = -1$ より、

$$k^2 - (v^1)^2 = g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}$$

落下のときは、$v^1 < 0$ であるから、

$$v^1 = -(k^2 - 1 + \frac{2m}{r})^{1/2}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{v^0}{v^1} = -k(1 - \frac{2m}{r})^{-1}(k^2 - 1 + \frac{2m}{r})^{-1/2}$$

質点が臨界半径に近づいたとして、$r = 2m + \varepsilon$ 、ε は充分小さいとする。

その２乗を省略すると、

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{2m}{\varepsilon} = -\frac{2m}{r - 2m}$$

これを積分すると、

$$t = -2m \log(r - 2m) + const$$

$r \rightarrow 2m$ で、$t \rightarrow \infty$ となることがわかる。つまり、質点が臨界半径 $r = 2m$ に着くまでには無限の時間がかかることになる。

ここで、この質点とともに移動している観測者がいるとすればどうだろうか。

この観測者の時間は ds であるから、

$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{v^1} = -(k^2 - 1 + \frac{2m}{r})^{-1/2}$ となり、これは $r \rightarrow 2m$ のとき、$-k^{-1}$ に収束する。

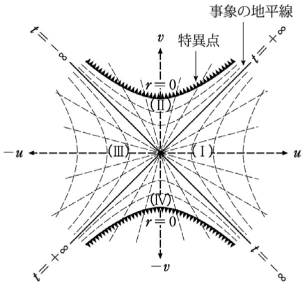
つまり、有限の時間に臨界半径 $r = 2m$ に到着するのである。

巨星の終末などで大量の物質がつぶれてきわめて小さい半径になったとき、重力崩壊は極限まですすんでいくことになる。外部の観測者の時計では無限の時間がかかるように見えるが、崩壊していく物質自身からすれば有限の時間でしかない。ついに、臨界半径を超えたとき、この内と外の交信は一切不可能となる。その境界を超えるには、無限の時間を要することとなるのだ。もはや $r < 2m$ の知見はもち得ない。このような領域は、ブラック・ホールとよばれる。（1971 年、「はくちょう座Ｘ－１」で最初のブラックホールが発見された。）

Column //

電荷をもたない球対称ブラックホール時空を表すシュバルツシルト解では、事象の地平面で計量（メトリック）のある成分が無限大になってしまい、一見事象の地平線で時空の特異点であるかのように見え、シュバルツシルト特異点と呼ばれたこともあった。

しかしその後、地平面で発散しない座標系（クルスカル図を参照）が見つかり曲率が発散する真の特異点ではないことがわかった。実際には事象の地平面で時空の曲率は無限大にならず、事象の地平面は特異点ではない。1960 年、クルスカル（M. Kruscal）とセケレス（Q. Szekers）は独立に、この時空に対して事象の地平面でメトリックのあらゆる成分が無限大にならないような座標系を見出した（クルスカル・セケレス座標系は、t と r を新しい時間 T と半径 R に置き換えた座標系として定義される）。この座標系に基づいてつくられた時空図をクルスカル図、またはクルスカル - セケレス図という。



この座標系では事象の地平線では光の世界線は時空の至るところで ±1 の傾きをもち、因果関係が見やすくなっている。また、この座標系ではブラックホール時空を表すばかりでなく、ホワイトホール時空も同時に表す。この座標は解析接続できて事象の地平線の外側に 2 つの漸近的に平坦な領域が存在する。この時空図で表される時空を、「極大拡大されたシュバルツシルト時空」という。

http://astro-dic.jp/kruscal-coordinates/

// End Column

宇宙項

http://kamusabia.com/einstein-ippansotaiseiriron-utyuko-botyo-kasoku-chikara-darkenergy/ より

一般相対性理論によると、質量が大きく重い物体が存在すると、その重力によって時空は歪んで曲がることになるため、無数の星々が存在する宇宙の時空は、次第に自分自身の重力によって収縮していくことになります。こうして閉じてられていく時空にはさらに強い重力が働くことになるため、最後には完全に潰れて、ブラックホールになってしまうというシナリオが描けます。（もしも宇宙に物質だけしか存在しないと、宇宙は重力によって収縮して潰れてしまうことになります。）

アインシュタインは「宇宙は静的でなければならない」と考えていたので、このような事態を避けるため、宇宙を静止させておくための「宇宙項（宇宙定数）」と呼ばれるものを付け加えました（1917 年)。「宇宙項（宇宙定数)」は、正負の符号によっては、重力に対する反重力（万有斥力）として機能するものであり、万有引力をちょうど相殺する万有斥力ということになります。つまり、宇宙には普遍的に反発しあう力（万有斥力）が存在することを意味します。

$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R + \Lambda g^{ij} = 16\pi N^{ij}$　　Λ の入っている項が宇宙項で、Λ は宇宙定数と呼ばれる。

これには、ラグランジアンに $L_c = c\sqrt{-g}$ なる項を付け加えればよい。c は適当な定数。

しかし 1920 年代後半に ハッブルの法則 が発見され、宇宙は静的ではない＝膨張していることがわかりました。宇宙を静的に保つ必要がなくなれば、宇宙項を導入した正当な理由もなくなってしまいます。アインシュタインはこの発見を聞き「宇宙項を方程式の中に入れたのは人生最大の過ちであった」と語ったといいます。そしてその後しばらくは、宇宙項はその存在を忘れ去られることとなりました。

さて、天文学が進展してくると今度は「 宇宙が膨張していることは確かだが、一定の速さで膨張しているのか、それとも減速し、いずれは収縮に転じるのか、あるいはこの膨張は加速度的なものなのか」ということが問題になってきます。1998 年頃に発表された、遠方で起こった超新星爆発の観測結果によると、どうやら現在の宇宙は加速膨張しているらしいということがわかってきたのです。この結果は，WMAP 衛星の観測した宇宙背景放射が出した宇宙論パラメータの値などとも一致しています。

ところが、宇宙が加速膨張しているとなると、何が宇宙膨張を加速させているのかということになります。もし宇宙がビッグバンによって始まり、そのせいで膨張しているのだとすれば、減速こそすれ加速する理由がないからです。ここで復活してくるのが宇宙項です。宇宙膨張の様子を記述する方程式にフリードマン方程式というものがありますが、この式によれば、宇宙が加速膨張するためには宇宙定数を含む項の存在が必要になります。つまり、宇宙の加速膨張という観測結果は、再度、宇宙項に光を当てることとなったのです。そして、最近では、「宇宙項（宇宙定数)」は、「真空のエネルギー」であり、「ダークエネルギー」のことではないかと考えられてきているようです。

現在の標準的な宇宙論では、宇宙は約 137 億年前、時間も空間も物質エネルギーもない「無」の状態から突然誕生したと考えられています。宇宙が誕生した瞬間に実際に何が起きたのかは、まだ正確には分かっていないようですが、生まれたばかりの宇宙には物質は存在しておらず、このミクロの宇宙はわずかな「真空のエネルギー」に満たされていたようです。アインシュタインの一般相対性理論に基づくと、「真空のエネルギー」は互いに反発する力、すなわち斥力が強く働きますので、この斥力によって宇宙は一気に加速度的に膨らみはじめ、急激な大膨張（インフレーション）を引き起こしたと考えられています。そして、急激な大膨張（インフレーション）が終わる頃「真空のエネルギー」は消滅し、熱エネルギーに変わりましたが、これによって宇宙は一気に加熱され、超高温・高圧の「火の玉」状態になったようです。これがいわゆるビッグバンと呼ばれるものであり、この時、現在の宇宙を満たしている物質（正確にはその質量分のエネルギー）も生まれたのだと考えられています。

1990 年代末には、宇宙の膨張を加速させる未知の存在は、「ダークエネルギー（暗黒エネルギー)」と呼ばれるようになりました。宇宙の構成要素のうち、星や銀河など観測できる物質は約４．９％にしか過ぎず、残り約９５．１％のうち、ダークマター（暗黒物質）が約２６．８％、ダークエネルギー（暗黒エネルギー）が約６８．３％になると言われています。

現在の宇宙論研究者たちの間では、「宇宙項（宇宙定数)」は実在しており、宇宙初期の急激な大膨張（インフレーション）を引き起こした「真空のエネルギー」だと考えられているようです。「ダークエネルギー（暗黒エネルギー)」の候補には、「宇宙項（宇宙定数)」の他にも、重力などの４つの基本的な力に加わる第５の力「クインテッセンス（第５元素)」とする見方もあるようですが、もしかしたら、アインシュタインが一度は捨てた「宇宙項（宇宙定数)」が、実は正しかったという可能性もあるようです。

補論　エネルギー・運動量テンソル　https://ja.wikipedia.org/wiki/ エネルギー・運動量テンソル

エネルギー・運動量テンソルはネーターの定理により、時空の並進対称性のネーター・カレントとして定められる。

作用積分が

$$S[\phi] = \int d^4x\, L(\phi\,,\partial\phi)$$

と書かれているとき、時空の微小な併進 $x \to x' = x + \xi$ に対して、φ′(x′)=φ(x) が成り立つ。

従って、場は

$$\delta_\xi \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \phi(x-\xi) - \phi(x) = -\,\xi^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$$

と変換される。

エネルギー・運動量テンソルは

$$T_\mu{}^\nu := \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu\phi)}\,\partial_\mu\phi - \delta_\mu{}^\nu L$$

となる。

別の定義の仕方として、計量の変分により定義する方法がある。

作用積分が

$$S[g\,,\phi] = \int d^4x\, L(g\,,\partial g\,,\phi\,,\partial\phi)$$

と書かれているとき、計量の変分

$$g^{\mu\nu}(x) \to g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) + \delta g^{\mu\nu}(x)$$

に対して、

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\;T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})}$$

で定義される。

各成分の意味

T^{00} は、エネルギー密度である。
T^{0j} は、x^j の方向へのエネルギーの流れである。
T^{i0} は、i - 成分の運動量密度である。
T^{ij} は、x^j の方向への i - 成分の運動量の流れである。

完全流体近似のエネルギー・運動量テンソル

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\,u^\mu\,u^\nu + g^{\mu\nu}\,p$$

$\rho\,,p$ は、静止系で観測したときの質量エネルギー密度と圧力
$g^{\mu\nu}\,,u^\mu$ は、計量テンソル・流体の 4 元速度ベクトル

電磁場のエネルギー・運動量テンソル

電磁場のラグランジアン密度

$$L_{em}(g\,,\partial g\,,A\,,\partial A) = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\;g^{\mu\nu}\,g^{\rho\sigma}\,F_{\mu\rho}\,F_{\nu\sigma} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\;F_{\mu\rho}\,F^{\mu\rho} = \frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\;F_{\mu\rho}\,F^{\rho\mu}$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は電磁場テンソル、A_μ は電磁ポテンシャル

これからエネルギー・運動量テンソルを計算すると

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left(g^{\rho\sigma}\,F_{\mu\rho}\,F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}\,F^{\rho\sigma}\,F_{\rho\sigma}\right)$$

補論　ディラック「一般相対性理論」より　ガウスの定理・ストークスの定理

反変ベクトル

ベクトル A^i の共変的発散 $A^i{}_{:i}$ はスカラーである。これは

$$A^i{}_{:i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i{}_{ji}\, i^j = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i}A^i = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i} \quad ①$$

page29 Calc.Corner 参照

となる。

この $A^i{}_{:i}$ を、$\int S\sqrt{-g}\,d^4x =$ 不変 の S に代入すれば、不変量

$$\int A^i{}_{:i}\sqrt{-g}\,d^4x = \int\frac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i}\,d^4x$$

を得る。積分領域が 4 次元時空の有限体積なら、右辺はガウスの定理によって 3 次元の表面積分に直される。

もし、 $A^i{}_{:i} = 0$ ならば

$$\frac{\partial(A^i\sqrt{-g}\,)}{\partial x^i} = 0 \qquad ②$$

となり、保存則をあたえる。

すなわち、

$A^0\sqrt{-g}$　　　$\Rightarrow$　密度

$A^\mu\sqrt{-g}\quad(\mu = 1, 2, 3)$　　$\Rightarrow$　流束

で与えられる流体が保存されるということである。

実際、②を時刻 x^0 のきまった 3 次元体積 V の上で積分すれば

$$\frac{\partial(\int_V A^0\sqrt{-g}\,d^3x)}{\partial x^0} = -\int_V\frac{\partial(A^\mu\sqrt{-g}\,)}{\partial x^\mu}\,d^3x$$

$= -$ (V の境界にわたる、流束 $A^\mu\sqrt{-g}$ の法線成分の表面積分)

となる。V の境界を過ぎる流れがなければ、$\int A^0\sqrt{-g}\,d^3x$ は一定である。

テンソル

ベクトル A^i に対するこの結果は、一般には、 2 つ以上の添え字をもつテンソルには拡張されない。

たとえば、 2 つの添え字をもつテンソル Y^{ij} を考えると、平らな空間であれば、$\int Y^{ij}{}_{:j}\,d^4x$ はガウスの定理を使って表面積分に直せるが、曲がった空間では、一般に $\int Y^{ij}{}_{:j}\,d^4x$ を表面積分に直すことはできない。

その例外は、反対称テンソル $\mathrm{F}^{ij} = -\mathrm{F}^{ji}$ の場合である。この場合は

$$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = \frac{\partial\mathrm{F}^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma^i{}_{jk}\mathrm{F}^{kj} + \Gamma^j{}_{jk}\mathrm{F}^{ik}$$

page28 Calc.Corner 参照

$$= \frac{\partial\mathrm{F}^{ij}}{\partial x^j} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}\mathrm{F}^{ik}$$

$$\therefore\quad \mathrm{F}^{ij}{}_{:j}\sqrt{-g} = \frac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g}\,)}{\partial x^j} \qquad ③$$

となり、

$$\int\mathrm{F}^{ij}{}_{:j}\sqrt{-g}\,d^4x = \int\frac{\partial(\mathrm{F}^{ij}\sqrt{-g}\,)}{\partial x^j}\,d^4x = \text{表面積分}$$

が言える。もし、$\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = 0$ なら保存則が成り立つことになる。

対称テンソル $\mathrm{Y}^{ij} = Y^{ji}$ の場合は、一方の添え字を引きおろして $\mathrm{Y}_i{}^j{}_{:j}$ を扱うことにすれば、余分の項はつくが似たような式が書ける。まず、

$$\mathrm{Y}_i{}^j{}_{:l} = \frac{\partial\mathrm{Y}_i{}^j}{\partial x^l} - \Gamma^k{}_{il}\mathrm{Y}_k{}^j + \Gamma^j{}_{lk}\mathrm{Y}_i{}^k \qquad \leftarrow$$

page22 共変微分の定義

で $l = j$ とおくと、

$$Y_i{}^j{}_{:j} = \frac{\partial Y_i{}^j}{\partial x^j} - \Gamma_{k,ij} Y^{kj} + \Gamma^j{}_{jk} Y_i{}^k$$ ← page19 第二種の定義 $\Gamma^k{}_{ij} = g^{kd}\Gamma_{d,ij}$ より $\Gamma^k{}_{ij} Y^j_k = g^{kd}\Gamma_{d,ij} Y^j_k = \Gamma_{d,ij} Y^{dj}$

$$= \frac{\partial Y_i{}^j}{\partial x^j} - \Gamma_{k,ij} Y^{kj} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k} Y_i^k$$ ← page26 公式 $\Gamma^j{}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^k}$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(Y_i{}^j\sqrt{-g}\,)}{\partial x^j} - \Gamma_{k,ij} Y^{kj}$$ ← 上の 1 項目と 2 項目はくくれる $\Gamma_{a,bc} + \Gamma_{b,ac} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}$

さらに、$Y^{kj} = Y^{jk}$、page19 ④ $\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}$ より、$\Gamma_{k,ij} Y^{kj} = \frac{1}{2}(\Gamma_{k,ji} + \Gamma_{j,ki}) Y^{kj} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} Y^{kj}$

$$\therefore\quad Y_i{}^j{}_{:j}\sqrt{-g} = \frac{\partial(Y_i{}^j\sqrt{-g}\,)}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} Y^{kl}\sqrt{-g} \qquad ④$$

が得られる。

共変ベクトル

共変ベクトル A_i に対しては

$$A_{i:j} - A_{j:i} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma^k{}_{ij} A_k\right) - \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \Gamma^k{}_{ji} A_k\right)$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \qquad ⑤$$

つまり、共変カールが、ふつうのカールに等しい。このことは共変ベクトルにおいてのみ成りたつ。

そもそも反変ベクトルのカールはつくれない。添字がバランスしないからである。

⑤で $i = 1,\ j = 2$ としてみる。すると、

$$A_{1:2} - A_{2:1} = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1}$$

これを「x^0 = 一定 , x^3 = 一定」の面分 ☡ にわたって積分する。

ストークスの定理より　　「物理でつかう数学 / ガウスの定理とストークスの定理」参照

$$\iint_{☡} (A_{1:2} - A_{2:1})\, dx^1 dx^2 = \iint_{☡} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1}\right) dx^1 dx^2$$

$$= \int_{②} (A_1\, dx^1 + A_2\, dx^2) \qquad ⑥$$

最後の積分は ☡ の周囲 ② にわたる。

こうして、面をすぎる流れの積分が、その面の周囲にわたる一周積分に等しいという結果を得た。これは、面の方程式が「x^0 = 一定 , x^3 = 一定」となる場合にかぎらず、どんな座標系においても一般に成り立つ。

このことを座標系によらない不変な形に書き表すために、２次元の面要素に対する一般公式を導入する。

２つの微小な反変ベクトル ξ^i、ζ^j をとれば、これらが張る面要素は２つ添え字の反対称テンソル

$$dS^{ij} = \xi^i \zeta^j - \xi^j \zeta^i$$ page31 面積分 $dS^{ij} = dx^i dx'^j - dx^j dx'^i$ 参照

できまる。もし ξ^i の成分が（$0,\ dx^1,\ 0,\ 0$）で ζ^i の成分が（$0,\ 0,\ dx^2,\ 0$）であれば、dS^{ij} の成分は

$$dS^{12} = \xi^1\zeta^2 - \xi^2\zeta^1 = dx^1 dx^2$$

$$dS^{21} = \xi^2\zeta^1 - \xi^1\zeta^2 = -dx^1 dx^2$$

を除いてゼロである。これを用いて⑥の左辺（面分 ☡ にわたる積分）を

$$\iint A_{i:j}\, dS^{ij}$$ 　　dS^{ij} は反対称テンソル

と書くことが出来る。右辺（☡ の周囲 ② にわたる積分）のほうは

$$\int A_i\, dx^i$$

なので、公式は

$$\frac{1}{2}\iint_{面} (A_{i:j} - A_{j:i})\, dS^{ij} = \iint_{面} A_{i:j}\, dS^{ij} = \int_{周囲} A_i\, dx^i \qquad ⑦$$

となる。