物理数学

目次

よく使う記号について

$\nabla = grad = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$　ナブラ

$div = \nabla\cdot$

$rot = \nabla\times$　　$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$\Delta = div\, grad = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$　ラプラシアン（デルタ）

$rot\, grad = \nabla\times\nabla$

grad（勾配）

div（発散）

$div\, \boldsymbol{V}$ はその点の近くで、$\boldsymbol{V}$ が単位体積あたりどれくらいあふれ出ているかを表す量だと解釈できる。

rot（回転）

$rot\, \boldsymbol{V}$ の z 成分は、その点に z 軸の向きに右ねじを置いたときに、どれくらいねじを回そうとするかを表す量だと解釈できる。

公式

$rot\, grad\, \phi = \nabla\times(\nabla\phi) = 0$　　ϕ はスカラー場

$div\, rot\, \boldsymbol{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$　　$\boldsymbol{A}$ はベクトル場

$rot\,(rot\, \boldsymbol{A}) = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

ベクトルの外積（公式）

$A\times(B\times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C$

$(A\times B)\times C = (A\cdot C)B - (B\cdot C)A$

$\nabla\cdot(A\times B) = B\cdot(\nabla\times A) - A\cdot(\nabla\times B)$

$\nabla\times(A\times B) = (B\cdot\nabla)A - (A\cdot\nabla)B + A(\nabla\cdot B) - B(\nabla\cdot A)$

$\nabla\times\nabla = 0$

$\nabla\cdot(\nabla\times A) = 0$

$\nabla\times(\nabla\times A) = \nabla(\nabla\cdot A) - \nabla^2 A$

$\nabla(\nabla\cdot A) = \nabla\times(\nabla\times A) + \nabla^2 A$

ベクトルの内積

２つのベクトル $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ の内積を

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{v} = u_1{}^*v_1 + u_2{}^*v_2 + \ldots\ldots + u_n{}^*v_n$ によって定義する。（† は転置およびその成分の複素共軛　t + ＊）

$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^*$

$(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (A^\dagger\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}),\quad (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^\dagger\boldsymbol{v})\quad \leftarrow (A\boldsymbol{u})^\dagger = \boldsymbol{u}^\dagger A^\dagger$

交換子

交換子　$[A, B] = AB - BA$

反交換子　$\{A, B\} = AB + BA$

ポアッソン括弧　$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}$

正規行列（もっともよくでてくる行列のグループ）

行列 T とその随伴行列 $T^\dagger$ との間に、

$TT^\dagger = T^\dagger T$

が成り立つとき、T を正規行列という。

正規行列の分類

	複素数		実数	
	名称	性質	名称	性質
正規行列 $TT^\dagger = T^\dagger T$	ユニタリ行列 U	$U^\dagger = U^{-1}$	直交行列 R	$R^t = R^{-1}$
	エルミート行列 H	$H^\dagger = H$	対称行列 S	$S^t = S$
	反エルミート行列 A	$A^\dagger = -A$	交代行列 A	$A^t = -A$

正規行列 の性質

- $(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) = (T^\dagger\mathbf{x}, T^\dagger\mathbf{y})$
- $T\mathbf{x} = \lambda\ \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad T^\dagger\mathbf{x} = \lambda^*\ \mathbf{x}$
- 異なる固有値の固有ベクトルは直交する。

対角化定理

① T が正規行列である ⇔ n 次正方行列 T が適当なユニタリ行列 U によって、対角行列 $U^{-1}TU$ へと変換できる。

② A が対称行列である ⇔ 実正方行列 A が、直交行列 R で対角化可能である。

⇔ は必要十分条件

行列の公式

$(AB)^* = A^* B^* \quad (A^*)^T = (A^T)^* = A^\dagger \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \quad |A^*| = |A|^*$　　A^* は A の複素共役

$(AB)^T = B^T A^T \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad |A^T| = |A|$

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger \quad |A^\dagger| = |A|^*$　　$A^\dagger$ は行列 A の随伴行列 (A の転置およびその成分の複素共役　A^{T*})

行列式の公式

$|AB| = |A||B|$

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$|A^T| = |A|$

$|A^*| = |A|^*$

$|A^\dagger| = |A|^*$

直交行列　$|A| = \pm 1$

ユニタリ行列　$|U| = 1$

正則行列

正則行列とは、逆行列を持つ正方行列のことである。

正方行列 A が可逆である（逆行列が存在する）ことの必要十分条件は、$|A| \neq 0$ である。

行列が正則であることの同値な条件

- AB = BA = I なる n 次正方行列 B が存在する（逆行列の存在）
- $\det A \neq 0$
- A の階数は n である
- A の固有値はすべて 0 ではない

等々

トレース

$Tr(AB) = Tr(BA)$

A を正方行列、P を正則行列 (逆行列が存在する行列) とすると、トレースは相似変換（「固有値 / 固有ベクトル」参照）に対して値を変えない。$Tr(P^{-1}AP) = Tr(A)$

行列のトレースは「固有値の和」

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ とおくと、$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

ユニタリ行列の性質（証明略）

ユニタリ行列の定義：$U^\dagger = U^{-1}$　あるいは　$U^\dagger U = U U^\dagger = 1$

- ユニタリ行列 U の行列式は、大きさ 1 の複素数である。
  $|detU| = 1$
- ユニタリ行列 U の固有値を λ とすると、$|\lambda| = 1$
- ユニタリ行列はエルミート行列の指数関数
  任意のユニタリ行列 U には、
  $U = e^{iH}$
  が成り立つエルミート行列 H が存在する。
- ユニタリ変換でトレースは不変
  $Tr(U^\dagger AU) = Tr(A)$
- ユニタリ行列 ⇔ 内積を不変に保つ　⇔は必要十分条件
  $U^\dagger = U^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
- ユニタリ行列 ⇔ ノルムを不変に保つ
  $U^\dagger = U^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad ||U\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$
- ユニタリ行列の列ベクトルは正規直交基底
- 任意の正規行列 A は、ユニタリ行列によって対角化可能である。
  すなわち、
  $U^{-1} A U = \Lambda$
  を満たす対角行列 Λ とユニタリ行列 U が存在する。

エルミート行列の性質

エルミート行列の定義：$H^\dagger = H$

- エルミート行列の固有値は実数である。
- エルミート行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交する。
- 任意のエルミート行列 H は、ユニタリー行列によって対角化可能である。$U^{-1} H U = \Lambda$
- 任意のエルミート行列 H の固有ベクトルによって、正規直交基底を構成することが出来る。
- 任意の正方行列を A とすると、$A^\dagger A$、$A^\dagger + A$ はエルミート行列となる。
- エルミート行列はユニタリ行列を生成する。
  任意のユニタリ行列 U は、あるエルミート行列 H で
  $U = e^{iH}$
  と表わせる。

行列の指数関数

正方行列 A に対して、e^A を以下の式で定義する。

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots\cdots$$

行列 A, B が交換可能（$AB = BA$）ならば、

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

ベーカー・キャンベル・ハウスドルフ（Baker-Campbell-Hausdorff ）の公式

$$exp(A)\, B\, exp(-A) = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots + \frac{1}{n!}[A, [A, \cdots, [A, B]\cdots]] + \cdots$$

$$e^A e^B = exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) + \cdots\right)$$

http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~akio.tomiya/filebox/Campbell-Baker-Hausdorff.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Baker%E2%80%93Campbell%E2%80%93Hausdorff_formula

相似変換（「固有値 / 固有ベクトル」参照）に関する性質

$A = P B P^{-1}$ のとき、$e^A = P e^B P^{-1}$

導出

$e^A = I + (P\,B\,P^{-1}) + \frac{1}{2!}\,(P\,B\,P^{-1})^2 + \frac{1}{3!}\,(P\,B\,P^{-1})^3 + \cdots\cdots$　　　$\leftarrow$　$(P\,B\,P^{-1})^k = P\,B^k\,P^{-1}$

$= P\,(\,I + B + \frac{1}{2!}\,B^2 + \frac{1}{3!}\,B^3 + \cdots\cdots\,)\,P^{-1}$

$= P\,e^B\,P^{-1}$

行列の指数関数の行列式

$det(e^A) = e^{tr(A)}$

この等式の右辺は常に非零であるから、左辺の行列式は非零 $det(e^A) \neq 0$ であり、したがって行列指数関数 e^A は常に正則であることがわかる。

導出　　https://manabitimes.jp/math/1312　　https://teenaka.at.webry.info/201811/article_12.html

$A = P\,J\,P^{-1}$（J は A のジョルダン標準形 *）とすると、

$e^A = P\,e^J\,P^{-1}$

両辺の行列式をとると、$\det(e^A) = det(P\,e^J\,P^{-1})$

$= det(P)\,det(e^J)\,det(P^{-1}) = det(e^J)$　　　$\leftarrow$　$|P^{-1}| = |P|^{-1}$

ここで、J は上三角行列であり対角成分は A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ である。

よって、e^J も上三角行列で対角成分は $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \cdots\cdots, e^{\lambda_n}$ である。　　$e^J = I + J + \frac{1}{2!}\,J^2 + \frac{1}{3!}\,J^3 + \cdots\cdots$

$\therefore$　$det(e^A) = det(e^J) = e^{\lambda_1 + \cdots\cdots + \lambda_n} = e^{tr(A)}$

ただし，最後に「固有値の和＝トレース」という性質を用いた。

* ジョルダン細胞とジョルダン標準形

次のような n 次正方行列をジョルダン細胞という。

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

任意の正方行列 A に対して、適当な正則行列 P が存在し、

$$P^{-1}\,A\,P = J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

とすることができる。 このとき λ_i は A の固有値である。この行列 $J = P^{-1}\,A\,P$ を、行列 A のジョルダン標準形という。

デルタ関数（ディラックのデルタ関数）

デルタ関数の定義

$\delta(x) = \infty \quad x = 0$ のとき

$\qquad 0 \quad x \neq 0$ のとき

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

デルタ関数の具体的な形の一例

$\delta(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, exp(-n\, x^2)$　　ガウス関数型

これは、ガウス分布 $N(x, m, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, exp(-\frac{(x-m)^2}{2s^2})$ において極限をとる。

$\delta(x - x_0) = \lim_{s \to 0} N(x, x_0, s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2s^2})$

$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp(i\, k\, x)\, dk$　　指数関数型

これは、フーリエ変換、逆フーリエ変換の公式をつかう。

$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, exp(-\, i\, k\, x)\, dx$　　フーリエ変換

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, exp(i\, k\, x)\, dx$　　逆フーリエ変換

において、$f(x) = \delta(x - x')$ としたもの。このとき、$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, exp(-\, i\, k\, x')$ なので、

$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp(i\, k\, (x - x'))\, dk$

δ 関数の性質

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a) \quad \rightarrow \quad f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x)$　デルタ関数は本来積分の中でしか定義されないものなのだが、このように略記されることもある。

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, \delta(x-b)\, dx = \delta(a-b)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(x) dx = \infty$

$x\, \delta(x) = 0$

$\delta(-x) = \delta(x)$

$\delta(ax) = |a|^{-1}\, \delta(x) \qquad a \neq 0$

$\delta(x^2 - a^2) = [\delta(x-a) + \delta(x+a)]/(2a) \qquad a > 0$

デルタ関数の微分の性質

$\nabla(\delta(x))\, \phi(x) = -\, \delta(x)\, \nabla\phi(x)$

部分積分を援用して、微分を試験関数 $\phi(x)$ に移すことができる。ただし、試験関数 $\phi(x)$ は、無限遠で 0 に収束するとする。

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a)\, \varphi(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\, \varphi'(x)\, dx = -\varphi'(a)$

中間で部分積分を使っている。積分内で、$\delta'(x-a)\, \varphi(x) \rightarrow -\, \delta(x-a)\, \varphi'(x)$ のような移行になる。

n 階微分では、

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x-a)\, \varphi(x)\, dx = (-\, 1)^n\, \varphi^{(n)}(a)$

ブラケット

$\langle x\, |\, x' \rangle = \delta(x - x')$

$<x\,|\,f(x)\,|\,x'> = f(x)\,\delta(x-x')$

$<x\,|\,p> = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(i\,x\,p/\hbar)$ とデルタ関数

$\hat{x}\,|\,x> = x\,|\,x>$　　$\hat{x}$ の固有関数 $|\,x>$、固有値 x

$\hat{p}\,|\,p> = p\,|\,p>$　　$\hat{p}$ の固有関数 $|\,p>$、固有値 p

$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,|\,x><x\,|=1$，$\int_{-\infty}^{\infty}dp\,|\,p><p\,|=1$　　完全性

$<x\,|\,x'> = \delta(x-x')$，$<p\,|\,p'> = \delta(p-p')$　　規格直交系

すると、これらの状態ベクトルの内積は、

$$<x\,|\,p> = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(i\,x\,p/\hbar),\ <p\,|\,x> = <x\,|\,p>^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(-i\,x\,p/\hbar)$$

と表される。

正しいかどうか、指数関数型のデルタ関数 $\delta(x-x') = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\,k\,(x-x'))\,dk$ を用いて吟味してみる。

$$<x\,|\,x'> = \int_{-\infty}^{\infty}dp\,<x\,|\,p><p\,|\,x'> = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\,(x-x')\,p/\hbar)\,dp \qquad \leftarrow \text{内積を代入してみる}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\,(x-x')\,k)\,dk \qquad \leftarrow p = \hbar\,k$$

$$= \delta(x-x')$$

$$<p\,|\,p'> = \int_{-\infty}^{\infty}dx\,<p\,|\,x><x\,|\,p'> = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\,(p'-p)\,x/\hbar)\,dx$$

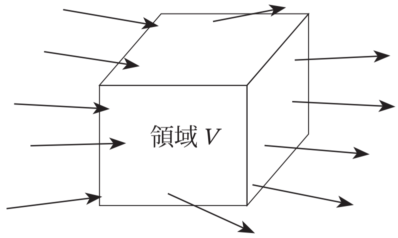
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\,(p'-p)\,k)\,dk \qquad \leftarrow x = \hbar\,k$$

$$= \delta(p'-p)$$

ガウスの定理とストークスの定理

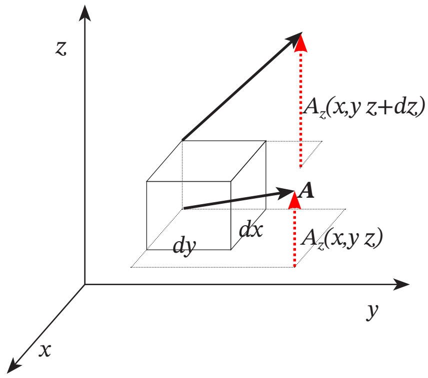
ガウスの定理（発散定理）

ガウスの定理とは発散 (div) に関する積分定理で、「ある体積内での湧き出し量と表面から出ていく量は等しい」というもの。



$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

定理の左辺の意味は『領域 V 内全体で，新たに増えたり減ったりする流れの総量』を表わすと考えられる。一方、定理の右辺は『領域の表面 S 全域に渡る、S を通過する流れの総量』を表わすものと考えられる。



この微小体積の湧き出しは、図に示すように微小面積 $dxdy$ の z 方向を考えると

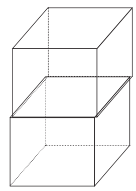
$$A_z(x, y, z+dz)\,dx\,dy - A_z(x, y, z)\,dx\,dy$$

となる。
同様に $dydz$ の x 方向、$dzdx$ の y 方向の差をそれぞれ考えることで、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dx\,dy\,dz = {}& A_x(x+dx, y, z)\,dy\,dz - A_x(x, y, z)\,dy\,dz \\ &+ A_y(x, y+dy, z)\,dz\,dx - A_y(x, y, z)\,dz\,dx \\ &+ A_z(x, y, z+dz)\,dx\,dy - A_z(x, y, z)\,dx\,dy\end{aligned}$$

ここで、$dx\,dy\,dz = dV$, $dy\,dz = dS_x$, $dz\,dx = dS_y$, $dx\,dy = dS_z$ より、

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = {}& A_x(x+dx, y, z)\,dS_x - A_x(x, y, z)\,dS_x \\ &+ A_y(x, y+dy, z)\,dS_y - A_y(x, y, z)\,dS_y \\ &+ A_z(x, y, z+dz)\,dS_z - A_z(x, y, z)\,dS_z\end{aligned}$$



この式を体積積分すると、右辺はその表面をぐるりと足し合わせたものになる。
たとえば、図のような積み重なった接合部分を考えると、$\boldsymbol{A}$ の出入りはちょうどその上下で打ち消し合う形となり、これを３方向でくり返していくと表面だけが残るというわけである。
つまり、

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

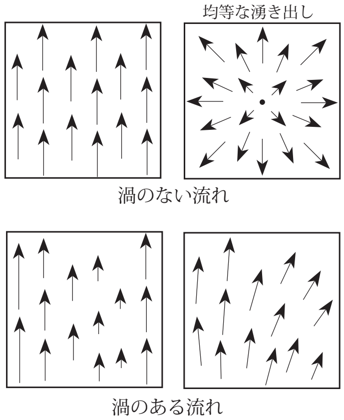
ストークスの定理

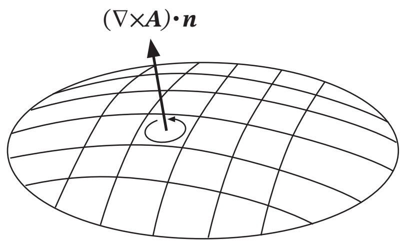
ストークスの定理とは回転 (rot) に関する積分定理で、「閉曲面に沿ってベクトルを線積分したものが、回転 (rot) を面積分したものに等しい」というもの。

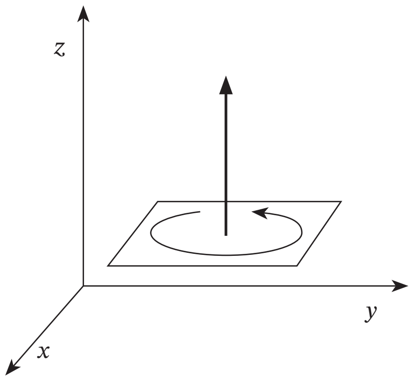
$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$　　$d\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{n}dS$ を意味する。$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトル。

$\nabla\times\boldsymbol{A}\ (= rot\boldsymbol{A})$ は、渦（回転）の強さをあらわしている。

わかりやすく例えてみると、川に浮かべた木の葉が回転もせず、真っ直ぐ流れていく場合は、流れに渦は無いといえる。一方、クルクル回わりながら流れていく場合には、渦（回転）が生じているわけだ。
ここでは、空間内の閉曲面を切り取って、その曲面上（例えでいうと川面）の渦を考えるということになる。







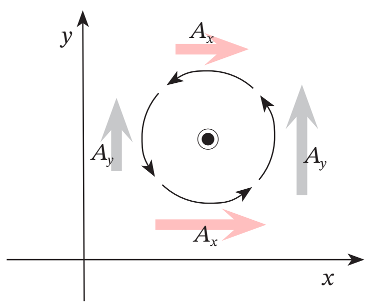
rotA のイメージを得るために、図のような簡単な z 方向の渦を考えてみよう。（右ネジ回転を正回転としている。）
まず、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の y 軸方向だけに注目した流れを考えてみる。
このとき、x 座標が大きくなるにつれて、y 軸正方向のベクトル A_y が大きくなっていくことが正回転に寄与することから、y 軸方向だけ見たベクトルの渦の大きさは、

$+\partial A_y/\partial x$

と表すことができる。
次に、x 軸方向だけに注目してみる。
y 座標が大きくなるにつれて、x 軸正方向のベクトル A_x が小さくなっていくことが正回転に寄与することから、、x 軸方向だけ見たベクトルの渦の大きさは

$-\partial A_x/\partial y$

と表すことができる。



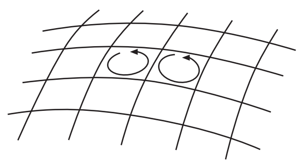
以上をまとめると、図のように「渦の向き」が z 軸正方向を向く渦の大きさは、2 つを足しあわせて、以下のように表すことができる。

$\partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y$

この値が大きいほど、「渦の向き」が z 軸方向のときの、渦の回転力が大きくなっていくというわけである。

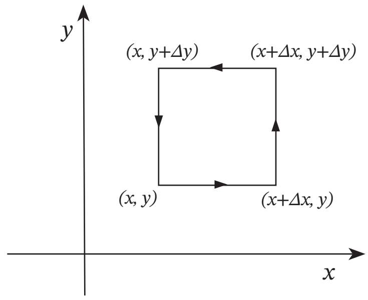
これらを総合すると、$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$　が渦（回転）の強さを表していることがわかるだろう。

さて、この $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の面積分を考えてみよう。ここでもガウスの定理のときと同じように、図のような２つのマスの接合部分に注目してみる。すると、ここでは渦は打ち消しあって、積分には寄与しなくなる。つまり、これを繰り返せば周辺だけが取り残されて、これが閉曲面の周辺での線積分になるというわけだ。



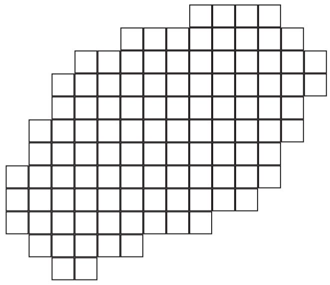
多少計算を加えておこう。

右図のような、二次元の平面曲線 c と、それによって囲まれる平面領域 S 上で考えてみる。



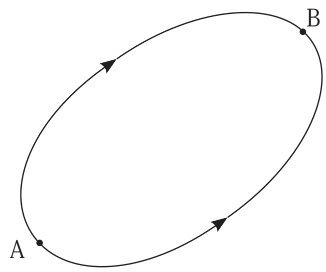
$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = A_x(x, y)\,\Delta x + A_y(x+\Delta x, y)\,\Delta y + A_y(x, y)\,(-\Delta y) + A_x(x, y+\Delta y)\,(-\Delta x)$$
$$= [A_x(x, y) - A_x(x, y+\Delta y)]\,\Delta x + [A_y(x+\Delta x, y) - A_y(x, y)]\,\Delta y$$
$$= -\frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y}\,\Delta y\,\Delta x + \frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y$$
$$= \left(\frac{\partial A_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y)}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$
$$= (\nabla\times\boldsymbol{A}(x, y))_z\,\Delta x\,\Delta y$$

もう少し拡張して、閉曲線により囲まれた平面を微小な正方形に分割して考えてみると、隣り合わせの正方形上の線積分の方向は反対向きになっており、そのためこの部分の線積分は相殺し、隣り合う相手のない周辺上の線積分だけが残ることになる。



$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \sum_i (\nabla\times\boldsymbol{A}(x_i, y_i))_z\,\Delta x_i\,\Delta y_i$$
$$= \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})_z\, dS$$

ストークスの定理より、$\nabla\times\boldsymbol{A}= 0$ のとき、$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$



閉曲線のまわりの一周の線積分を、A 点から出発して B 点に至る二つの曲線と上の線積分に分解してみる。このとき、二点間の線積分が途中の道筋によらず一定の値をとるための必要十分条件は、$\nabla\times\boldsymbol{A}= 0$ で与えられる。

グリーン関数

http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/14bibnh/111deq.html

グリーン関数 (Green's function) とは、微分方程式や偏微分方程式の解法の一つであるグリーン関数法に現れる関数のことである。

x に関する線形演算子 L を用いて次のように表すことができる微分方程式、

$$Ly(x) = q(x)$$

の解を形式的に (ある意味強引に)、

$$y(x) = L^{-1}q(x)$$

と書いたときの L の逆演算子 $L^{-1} \equiv G$ をグリーン演算子と言う。
このように都合のよい L^{-1} が、どうしたら得られるかが問題となる。

例えば、次のような線形演算子 L をとりあげてみる。

$$L = a(x)\frac{d}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)$$

$Ly(x) = q(x)$ を解きたいとき、まず以下の関数 $G(x, s)$ を探すことを試みる。

$$LG(x, s) = \delta(x-s)$$

そうすれば、次のような計算をすれば解 $y(x)$ が求まる。

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s)\, q(s)\, ds$$

なぜなら、演算子 L を作用させてみると、

$$\begin{aligned} Ly(x) &= L\int_{-\infty}^{\infty} G(x, s)\, q(s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} LG(x, s)\, q(s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-s)\, q(s)\, ds \\ &= q(x) \end{aligned}$$

このように、微分方程式 $Ly(x) = q(x)$ の形式解を、

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s)\, q(s)\, ds$$

という形で表したときの $G(x, s)$ をグリーン関数と定義する。

つまり、方程式 $Ly(x) = q(x)$ を解くということは、$LG(x, s) = \delta(s-x)$ となる $G(x, s)$ をもとめるということになる。
解は、$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s)\, q(s)\, ds$ となる。

物理学では、微分方程式を直接解く代わりに、まず単純な点源問題の解であるグリーン関数を求めた後、重ね合わせの原理によって微分方程式の解をグリーン関数を用いて表す。
$Ly(x) = q(x)$
連続的に分布した力 $q(x)$ から極限移行によって、ただ 1 個の点 $x = s$ における $\delta(x-s)$ なる力を考える。
この孤立した力をうけたときの弦の変位を $G(x, s)$ とする。
$LG(x, s) = \delta(x-s)$
そして連続的に分布した力 $q(x)$ による影響は、孤立した力を合成したものと考えるのである。
こうして、求める弦は $y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s)\, q(s)\, ds$ の形になる。

量子力学のブラ・ケット記法で表すと、

$$L\,|\,\alpha> = |\,\beta>$$

の左から L^{-1} をかけて ($L^{-1}L = I$ に注意して)、

$$|\,\alpha> = L^{-1}\,|\,\beta> = G\,|\,\beta>$$

と書いたときの $G\,(= L^{-1})$ をグリーン演算子という。
その連続基底 $|\,x>$ で展開した表現、

$$<x\,|\,\alpha> = <x\,|\,G\,|\,\beta> = \int_{-\infty}^{\infty} <x\,|\,G\,|\,x'><x'\,|\,\beta>\, dx'$$

$\downarrow\uparrow$

$\psi_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x')\, \psi_\beta(x')\, dx'$

における $< x \mid G \mid x' > = G(x, x')$ をグリーン関数という。

物理学における例

【ポアソン方程式】

電磁気学におけるポアソン方程式は、$L \equiv -\varepsilon\Delta$ の場合となる。

$-\varepsilon\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})$

この方程式の解は、よく知られているように、

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid}\, d\boldsymbol{r}'$$

である。

これを先のグリーン関数の定義式 $y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s)\, q(s)\, ds$ と比較すると、

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid}$$

が対応していることがわかる。

ここでのグリーン関数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は単位点電荷のポテンシャルであって、

$LG(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\varepsilon\Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$

が成り立っている。もちろんこれは先の $LG(x, s) = \delta(x-s)$ に相当している。

きちんと解くとすると、まず積分方程式 $\varphi(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \rho(\boldsymbol{r}')\, d\boldsymbol{r}'$ を仮定し、ポアソン方程式に代入するとグリーン関数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ の満たすべき式が得られる。

$-\varepsilon\Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$

両辺をフーリエ変換すると、$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ のフーリエ変換 $g(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}') = \dfrac{e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}}{\varepsilon \boldsymbol{k}^2}$ が得られる。これを逆フーリエ変換するとグリーン関数 $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ が求まる。

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' \mid}$$

線形演算子と関数の変換（フーリエ変換、ラプラス変換）

線形演算子

ある演算子 L が次の条件を満たすとき、L を線形演算子という。

$$L\{f_1+f_2\}=L\{f_1\}+L\{f_2\} \qquad (1)$$

$$L\{cf\}=cL\{f\}$$

f_1, f_2, f は演算 L を受ける任意の関数、c は任意の数

演算子の積

$L=L_2L_1$ もまた一つの線形演算子であり、この L を演算子 L_1 と L_2 の積という。

$$L_2L_1\{f_1+f_2\}=L_2\{L_1\{f_1\}+L_1\{f_2\}\}=L_2L_1\{f_1\}+L_2L_1\{f_2\}$$

$$L_2L_1\{cf\}=L_2\{cL_1\{f\}\}=cL_2L_1\{f\}$$

積の順序を変えることは、一般には許されない。

これが許される特別な場合として、偏微分 $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}$ の順序の交換や、積分と微分の順序の交換などがあり、これらはいずれも広い範囲で許される。

積分の微分

関数 f が変数 x のほかに、母数（副変数）α を含むとき、広い範囲で

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx \qquad (2)$$

とすることが許される。ただし、a, b のいずれか、または両方が α の関数であるときには、これは成り立たない。

関数の変換

母数 α を含む関数の定積分は、変数 x については定数であるが、α の関数である。いま、x と α との与えられた関数を $K(x,\alpha)$ とすると、これと x の関数 $f(x)$ との積はもちろん x と α との関数であるが、$K(x,\alpha)\,f(x)$ の積分は α の関数である。その関数を $g(\alpha)$ と書くと

$$g(\alpha)=\int_a^b K(x,\alpha)f(x)\,dx \qquad (3)$$

ここでこの関係 (3) を関数 $f(x)$ を他の関数 $g(\alpha)$ に変換する関係とみるならば、

$$\int_a^b K(x,\alpha)\,dx \qquad (4)$$

は演算子の役割をしていることがわかる。この演算子は線形であることは、すぐ確かめられる。$K(x,\alpha)$ は広い範囲で任意に選べるから、$\int_a^b K(x,\alpha)\,dx$ は線形演算子のかなり一般の形であり、逆にいろいろな線形演算子をこの形で表すことができる。2 変数関数 $K(x,\alpha)$ をその線形演算子の核（kernel）という。

ヒルベルト空間をとると、その次元は可算無限であるから、その中で演算子の核は要素の数が無限に多い 2 次元の行列で表現される。このような表現は量子力学において特に重要である。

フーリエ変換

(4) の形の線形演算子のうち、特に重要なものは核 $K(x,\alpha)$ が三角関数（正弦または余弦）、すなわち

$$K(x,\alpha)=\sin(\alpha x) \quad \text{または} \ \cos(\alpha x) \qquad (5)$$

の場合である。

最初にフーリエ級数をみておこう。

変数 x について区間 $-l<x<l$ で定義されている関数 $f(x)$ を、その区間でフーリエ級数で表すと

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\{\frac{m\pi}{l}(x-\xi)\}\,d\xi \qquad (6)$$

（末尾「フーリエ級数公式」参照）

l が有限のときはこれでよいが、l が無限大のときはどうなるか。
(6) で l が無限大になった極限を考えると、(6) の右辺第 1 項は無限小で無視できるが、第 2 項は無限に小さい項を無限個よせ集めるので有限になる。$\dfrac{m\pi}{l}$ は連続変数となるのでこれを α とおく。また無限小の量 $\dfrac{\pi}{l}$ を $d\alpha$ とおく。

$$\frac{m\pi}{l}=\alpha,\quad \frac{\pi}{l}=d\alpha \qquad (7)$$

すると (6) は、

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\{\,\alpha\,(x-\xi)\,\}\,d\xi} \qquad (8)$$

となる。この式はある関数 $f(x)$ が右辺に示す 2 重積分で表されることを示すものである。これをフーリエの積分定理という。

$f(x)$ が偶関数の場合は、$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\cos(\alpha x)\,d\alpha\int_{0}^{\infty}f(\xi)\cos(\alpha\xi)\,d\xi$　　(9)　（末尾「フーリエ級数公式」参照）

$f(x)$ が奇関数の場合は、$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\sin(\alpha x)\,d\alpha\int_{0}^{\infty}f(\xi)\sin(\alpha\xi)\,d\xi$　　(10)

これらの式はいわばフーリエ級数を無限領域に拡張したものである。このときのフーリエ係数が、

(9) では、$g(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}f(\xi)\cos(\alpha\xi)\,d\xi$　　(11)　　(3)、(5) で言えば 核 $K(\xi,\alpha)=\cos(\alpha\xi)$

(10) では、$g(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}f(\xi)\sin(\alpha\xi)\,d\xi$　　(12)　　核 $K(\xi,\alpha)=\sin(\alpha\xi)$

の形で与えられるのである。

しかし、一般の場合の (8) に対するフーリエ係数は、このままでは (11) や (12) のようなまとまった形に書けない。そこで複素数を導入するとそれができるようになる。
(8) の代わりに、

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{i\alpha(x-\xi)}\,d\xi} \qquad (13)$$

とかくと、その実部がちょうど (8) になる。そしてこれは、

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\,d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-i\alpha\xi}\,d\xi \qquad (14)$$

と書けるから、フーリエ係数にあたる $g(\alpha)$ は、

$$\boxed{g(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-i\alpha\xi}\,d\xi} \qquad (15)$$

核 $K(\xi,\alpha)=e^{-i\alpha\xi}$

で与えられることになる。
(15) を、関数 f の関数 g への変換法則とみるとき、この変換をフーリエ変換という。

たとえば、型 の $f(x)=$ ($|x|<1$ のとき 1), ($|x|>1$ のとき 0) のような関数は、

$$g(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{-i\alpha\xi}\,d\xi=\frac{1}{2i\pi\alpha}\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)=\frac{\sin\alpha}{\pi\alpha} \qquad (16)$$

のように変換される。

(15) を (14) に代入すると、

$$\boxed{f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha} \qquad (17)$$

となるが、これは g を f に変換する式で、フーリエ変換 (15) の逆変換にあたっている。これをフーリエ逆変換という。

註釈　係数の付け方を変えて、フーリエ変換 $F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ikx}\,dx$、フーリエ逆変換 $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\,e^{ikx}\,dk$ と定義しているものもある。(13) のどの部分を切り取るかだけのことである。

対称性を重んじれば、$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$、$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\, e^{ikx}\, dk$

フーリエ積分に現れる基底 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(i\,k\,x)$ の直交性

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} exp(i\,k\,(x - x'))\, dk = \delta(x - x')$$

デルタ関数参照

フーリエ級数公式

奇関数と偶関数について

奇関数：$f(-x) = -f(x)$

偶関数：$f(-x) = f(x)$

$cos(mx)$ は偶関数、$sin(mx)$ は奇関数　$(m = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

区間 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ での展開

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots\cdots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots\cdots$$

$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots$ をフーリエ係数という。

$$a_0 = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\, d\xi$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos(m\xi)\, d\xi \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin(m\xi)\, d\xi \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$f(x)$ が奇関数の場合：a_0, a_m はすべて 0、また b_m は偶関数の積分なので 0 から π までの積分を 2 倍すればよい

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(mx) \int_0^{\pi} f(\xi) \sin(m\xi)\, d\xi$$

$f(x)$ が偶関数の場合：逆に b_m はすべて 0

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi)\, d\xi + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(mx) \int_0^{\pi} f(\xi) \cos(m\xi)\, d\xi$$

区間 $-l \leqq x \leqq l$ での展開

変数の変換 $x' = \frac{l\,x}{\pi}$ を行えばよい。

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots\cdots + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots\cdots$$

各フーリエ係数は、

$$a_0 = \frac{1}{2\,l} \int_{-l}^{l} f(\xi)\, d\xi$$

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos\frac{m\pi\xi}{l}\, d\xi$$

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\xi) \sin\frac{m\pi\xi}{l}\, d\xi$$

ξ は積分変数で、x と区別するためのものだから、別の文字記号を用いてもよい。

$f(x)$ が偶関数ならば、$f(x) = \frac{1}{l} \int_0^{l} f(\xi)\, d\xi + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{m\pi x}{l} \int_0^{l} f(\xi) \cos\frac{m\pi\xi}{l}\, d\xi$

$f(x)$ が奇関数ならば、$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi x}{l} \int_0^{l} f(\xi) \sin\frac{m\pi\xi}{l}\, d\xi$

a, b を代入して三角関数の公式 * をつかうと、次のようにも書ける。

$$f(x) = \frac{1}{2\,l} \int_{-l}^{l} f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos\{ \frac{m\pi}{l} (x - \xi) \}\, d\xi$$

※　$\cos\theta \cos\varphi = [\cos(\theta-\varphi) + \cos(\theta+\varphi)]/2$,　$\sin\theta \sin\varphi = [\cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)]/2$

l が無限大のとき（$-\infty \leqq x \leqq \infty$）

$f(x)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\{\alpha(x-\xi)\}\,d\xi$　　　(8) 参照

$f(x)$ が偶関数ならば、$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(\alpha x)\,d\alpha\int_{0}^{\infty}f(\xi)\cos(\alpha\xi)\,d\xi$　　　(7) の置き換え　$\dfrac{m\pi}{l}=\alpha$，$\dfrac{\pi}{l}=d\alpha$

$f(x)$ が奇関数ならば、$f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin(\alpha x)\,d\alpha\int_{0}^{\infty}f(\xi)\sin(\alpha\xi)\,d\xi$

複素フーリエ級数

区間 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ での展開　$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$　　$c_n=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx$　　$n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots\cdots$

区間 $-l \leqq x \leqq l$ での展開　$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nx/l}$　　$c_n=\dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{-i\pi nx/l}\,dx$

$l=\infty$ のとき　$f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{i\alpha(x-\xi)}\,d\xi$　　(13) 参照　フーリエ係数にあたる部分は $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,e^{-i\alpha\xi}\,d\xi$

ラプラス変換

(15) の代わりに、定積分

$$g(\alpha)=\int_{0}^{\infty} f(\xi)\,e^{-\alpha\xi}\,d\xi \qquad (18)$$

で与えられる変換をラプラス変換という。

これは、微分方程式の解を求めることをはじめ、多くの応用がある。α は一般に複素数でよいが、その実部が正でないとこの定積分は収束しない。

この変換は、

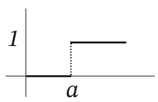
$$g=L[f] \qquad (19)$$

と記号されることがあり、このとき f を表関数、g を裏関数ということがある。

いくつかの例

$f(\xi)$	$g(\alpha)$
1	$1/\alpha$
ξ^n	$n!/\alpha^{n+1}$
$\sin k\xi$	$k/(\alpha^2+k^2)$
$\cos k\xi$	$\alpha/(\alpha^2+k^2)$
$e^{a\xi}$	$1/(\alpha-a)$　$(\mathrm{Re}\,a<\mathrm{Re}\,\alpha)$
$\delta(\xi-a)$	$e^{-a\alpha}$　$(a>0)$
$U(\xi-a)$	$e^{-a\alpha}/\alpha$　$(\mathrm{Re}\,\alpha>0\ \ a\geq 0)$

$U(\xi-a)$ は単位関数



ラプラス変換の逆変換は、フーリエ変換の場合と異なり、複素積分になる。これを逆ラプラス変換といい（これは、L^{-1} で記号する）、次のようになる。　――説明略

$$f(\xi)=\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\alpha\xi}g(\alpha)\,d\alpha \qquad (20)$$

ここに c はラプラス変換 (18) が収束する領域が、$\mathrm{Re}\,\alpha>c$ で表せるような実数（収束座標）を表す。

【応用】

● $ay''+by'+cy=f(t)$　　$t=0$ のとき $y=y_0$，$y'=v_0$

$Y(s)=Ly(t)$，$F(s)=Lf(t)$　とすると

$$Y=\frac{(as+b)y_0+av_0}{as^2+bs+c}+\frac{F(s)}{as^2+bs+c}$$

$y = L^{-1}Y$

● 上の例で $Z(s) = as2 + bs + c$ とおけば、（$Z(s)$ を微分演算子 $a\dfrac{d^2}{dt^2} + b\dfrac{d}{dt} + c$ のインピーダンスという）

$Y = \dfrac{A(s)}{Z(s)} + \dfrac{F(s)}{Z(s)}$　　　　$A(s) = (as + b)y_0 + av_0$

$y = L^{-1}\dfrac{A(s)}{Z(s)} + L^{-1}\dfrac{F(s)}{Z(s)}$

$L^{-1}\dfrac{A(s)}{Z(s)}$ は微分方程式の右辺 $f(t)$ に無関係であり、微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$（$t = 0$: $y = y_0$, $y' = v_0$）の解である。

また、$L^{-1}\dfrac{F(s)}{Z(s)}$ は微分方程式 $ay'' + by' + cy = f(t)$ の初期値（$t = 0$ で $y = 0$, $y' = 0$）における解である。

―― 初期静止解：これを入力関数 $f(t)$ に対するインピーダンス $Z(s)$ の応答という。

$$\text{入力} \xrightarrow[f(t)]{F(s)} \boxed{Z(s)} \xrightarrow[L^{-1}\frac{F(s)}{Z(s)}]{\frac{F(s)}{Z(s)}} \text{応答}$$

入力関数 $f(t)$ が単位関数 $U(t)$ であるとき、この $Z(s)$ の応答を $Z(s)$ の単位応答という。

単位応答 $g(t) = L^{-1}\dfrac{1}{s\,Z(s)}$

入力関数 $f(t)$ がデルタ関数 $\delta(t)$ であるとき、この $Z(s)$ の応答を $Z(s)$ のデルタ応答という。

デルタ応答 $h(t) = L^{-1}\dfrac{1}{Z(s)}$

$h(t) = g'(t)$ が成り立っている。

さて、インピーダンス $Z(s)$ の入力関数 $f(t)$ に対応する応答を $\chi(t)$ とすれば、

$$\chi(t) = f(0)\,g(t) + \int_0^t f'(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$
$$= \int_0^t f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$$
$$= \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

が成り立つことがわかる。ただし、$f(t)$ は連続。
すなわち、インピーダンス $Z(s)$ について、単位応答またはデルタ応答がわかれば、任意の入力関数 $f(t)$ に対する応答 $\chi(t)$ が計算できることになる。

固有値 / 固有ベクトル

線形空間 V（有限次元とは限らない）上の線形変換 A に対して、次の方程式

$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$

を満たす零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x}$ とスカラー λ が存在するとき、$\boldsymbol{x}$ を A の固有ベクトル（右固有ベクトル）、λ を A の固有値と呼ぶ。

・線型変換 A の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は、A を作用させてもその方向は変えず、定数倍されるだけの影響しか受けない（拡大率が 1 なら全く影響を受けない）ベクトルで、零ベクトルでないもののことである。
・線型変換 A の固有値は、固有ベクトルの A による拡大率 λ のことである。
・V が関数空間である場合には、固有ベクトルのことを固有関数ともいう。

線型変換 A の固有値 λ に対するその固有ベクトル（および零ベクトル）は部分線形空間をなし、これを固有空間という。ヒルベルト空間論において線型作用素 あるいは線型演算子と呼ばれるものは線型変換であり、やはりその固有値や固有ベクトルを考えることができる。

A の固有値 λ が満たすべき条件は、

$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$

すなわち

$(\lambda I-A\boldsymbol{x})=0$

を満たす $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$ が存在することである。ただし、I は単位行列である。

線形方程式・行列式の理論より、この条件は

$det(\lambda I-A)=0$

となる。この方程式のことを固有方程式という（固有値 λ はこの方程式を解くことによって求めることができる）。固有方程式は λ についての n 次代数方程式であり、A は、この方程式の解として、重複度を含めて n 個の固有値を持つことが分かる。

固有値の個数：<u>重複度を含めて必ず n 個の固有値が存在する</u>。

特に行列 A がエルミート（$A^{\dagger}=A$）あるいは実対称（=実エルミート）の場合、固有方程式は永年方程式とも言われる。

ただし、$A^{\dagger}=\bar{A}^{T}$　転置およびその成分の複素共軛、　$\bar{A}=A^{*}$　複素共軛

・エルミートの固有値は<u>必ず実数</u>になる。
・エルミートである行列の、固有値を異にする固有ベクトルは<u>相互に直交</u>する（内積が 0 である）。

【証明】

1) エルミート行列の固有値は実数である。

$A|x>=\lambda|x>$　　①

①のエルミート共役をとると、

$<x|A^{\dagger}=\lambda^{*}<x|$　→　$<x|A=\lambda^{*}<x|$　　②

①に左から $<x|$ を掛け、②に右から $|x>$ を掛ける。

$<x|A|x>=\lambda<x|x>$

$<x|A|x>=\lambda^{*}<x|x>$

これらより、$\lambda=\lambda^{*}$

$\therefore \lambda$ は実数

2) エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

$A|x_1>=\lambda_1|x_1>$　　①

$A|x_2>=\lambda_2|x_2>$　　②

上と同様に、①のエルミート共役をとると、

$<x_1|A=\lambda_1^{*}<x_1|$　　λ_1 は実数だから、

$=\lambda_1<x_1|$

右から $|x_2>$ を掛けると、

$<x_1|A|x_2> = \lambda_1 <x_1|x_2>$

②を代入すると、

$\lambda_2 <x_1|x_2> = \lambda_1 <x_1|x_2>$

$(\lambda_2 - \lambda_1) <x_1|x_2> = 0$

$\therefore <x_1|x_2> = 0$

相似変換

N × N の正方行列 A, B に対して以下を満たすような正則行列 P が存在するとする。

$B = P^{-1} A P$

このとき A と B は相似（similar）であると呼び、B は A を相似変換した行列であると言う。

• A と B が相似であればそれらの固有値は一致する。

• 任意の固有値に対する B の固有ベクトルを **x** とすると，A の固有ベクトルは P**x** となる。

A の固有値 λ を求める固有方程式：$\det(\lambda I - A) = 0$

$\det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \det(P^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(P) = 0$

$\det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \det(\lambda P^{-1} P - P^{-1} A P) = \det(\lambda I - P^{-1} A P)$

$\therefore \det(\lambda I - P^{-1} A P) = 0$

つまり、$P^{-1} A P$ の固有値を求めることと同じことになる。

相似な行列の間ではさまざまな性質が保たれ、たとえば以下のようなものが挙げられる。

階数 (rank)
行列式
トレース
固有値（ただし、固有ベクトルは一般には異なる）
特性多項式
最小多項式
単因子

昇降演算子　https://ja.wikipedia.org/wiki/ 昇降演算子

2 つの演算子 X、N が次の交換関係を満たすと仮定する。

$[N,X]=cX$　　c はスカラー量

$|n>$ を演算子 N の固有状態とする。

$N|n>=n|n>$

このとき演算子 X が $|n>$ に作用すると固有値を c だけシフトする。

$$\begin{aligned} NX|n> &= (XN+[N,X])|n> \\ &= XN|n>+[N,X]|n> \\ &= nX|n>+cX|n> \\ &= (n+c)X|n> \end{aligned}$$

つまり $|n>$ が N の固有値 n における固有状態であるとき、$X|n>$ は固有値 $n+c$ をもつ N の固有状態である。演算子 X は c が正の実数であるとき N の上昇演算子、c が負の実数であるとき N の下降演算子という。

もし N がエルミート演算子 のとき、c は実数でなければならず、X のエルミート随伴 は次の交換関係を満たす。

$[N,X^\dagger]=-cX^\dagger$

特に X が N の下降演算子のときの $X^\dagger$ は N の上昇演算子であり、その逆も成り立つ。

///

例　角運動量演算子　　「群論 / 補論 4-3 一般角運動量」

交換関係 $[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$（角運動量の定義）　　具体的には、$[\hat{J}_1,\hat{J}_2]=i\hat{J}_3$, $[\hat{J}_2,\hat{J}_3]=i\hat{J}_1$, $[\hat{J}_3,\hat{J}_1]=i\hat{J}_2$

$\hat{\boldsymbol{J}}^2\equiv\hat{J}_1^{\,2}+\hat{J}_2^{\,2}+\hat{J}_3^{\,2}$

$\hat{J}_\pm\equiv\hat{J}_1\pm i\hat{J}_2$　　$\hat{J}_+$ と $\hat{J}_-$ は互いにエルミート共役の関係になる。$\hat{J}_-^{\,\dagger}=\hat{J}_+$, $\hat{J}_+^{\,\dagger}=\hat{J}_-$

公式

$[\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_1]=[\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_2]=[\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_3]=0$

$[\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_\pm]=0$

$[\hat{J}_+,\hat{J}_-]=2\hat{J}_3$

$[\hat{J}_3,\hat{J}_\pm]=\pm\hat{J}_\pm$

次が、上で見た昇降演算子 X と同じ交換関係になっている。

$[\hat{J}_3,\hat{J}_\pm]=\pm\hat{J}_\pm$

$[\hat{\boldsymbol{J}}^2,\hat{J}_\pm]=0$

$\hat{J}_\pm$ を乗ずると、$\hat{J}_3$ の固有値は 1 つずつ増減するが、$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値は不変である。

例　調和振動子　　「量子力学 / 第 2 部 場の量子論 / 場の量子化―いくつかの例、自由場の量子論」

正準交換関係　$[\hat{p},\hat{q}]=-i$　　$\hat{H}=\dfrac{1}{2}(\hat{p}^2+\omega^2\hat{q}^2)$　　Bose 粒子

ここで $\hat{p}$, $\hat{q}$ のかわりに次式で定義される演算子 $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を導入する。

$$\hat{a}=\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{q}+\frac{i}{\omega}\hat{p}\right),\quad \hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{q}-\frac{i}{\omega}\hat{p}\right)$$

このとき　$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$,　$\hat{H}=\dfrac{\omega}{2}\{\hat{a}^\dagger,\hat{a}\}=\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}+\dfrac{\omega}{2}$　　$\{A,B\}=AB+BA$

すなわち　$[\hat{H},\hat{a}^\dagger]=\omega\hat{a}^\dagger$,　$[\hat{H},\hat{a}]=-\omega\hat{a}$

$\hat{H}$ の固有値は、$E_n=\omega(n+\dfrac{1}{2})$　　$n=0,1,\cdots\cdots$ となる。

例　生成消滅演算子　　「量子力学 / 第 2 部 場の量子論 / 生成演算子と消滅演算子」

ある演算子 $\hat{a}$ と、そのエルミート共役 $\hat{a}^\dagger$ が、交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1$ を満たすとする。（Bose 粒子）

$\hat{N}\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a}$ とおくと、

$[\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a}$,　$[\hat{N},\hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger$

$\hat{N}\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有値は、$0,1,2,3,\cdots\cdots,\infty$ となる。

//

角運動量演算子を見ると、これはリー代数で見たカルタン標準形 $\{H_a , E_\alpha , E_{-\alpha}\}$ の性質によく似ている。H_a は J_3 に、$E_{\pm\alpha}$ は昇降演算子 $J_\pm$ に類似した役割を果たしていることがわかる。

カルタン標準形 $\{H_a , E_\alpha , E_{-\alpha}\}$　「群論 / V 単純リー代数とルート空間 / 7 カルタン標準系とルート」

$[H_a , E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha_a E_{\pm\alpha}$

$[E_\alpha , E_{-\alpha}] = \alpha_a H_a$

$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$

「群論 / V 単純リー代数とルート空間 / １０ ウエイトと既約表現」

$H_a \mid \mu, D > = \mu_a \mid \mu, D >$ $(a = 1, \cdots , r)$　　$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots , \mu_r)$ はウエイト

$\mid \mu, D >$ に E_α あるいは $E_{-\alpha}$ を繰り返し作用させせることによってウエイトのシリーズ

$\boldsymbol{\mu} - m\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu} - (m - 1)\boldsymbol{\alpha}, \cdots , \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}, \cdots , \boldsymbol{\mu} + n\boldsymbol{\alpha}$　$(m, n \geq 0)$

が得られる。

「群論 / Ⅳ 回転群 / リー代数とその表現」

回転群 **SO**(3) に対するリー代数の既約表現を指定するパラメーターは j で、j を指定すると、その表現の次元は 2 j + 1 であり、2 j + 1 個の基底ベクトルは $\hat{J}_3$ の固有値 m_j で区別される。m_j は一般にウエイトと呼ばれる。

$\hat{J}_3 \mid j , m_j > = m_j \mid j , m_j >$　　m_j のとりえる値は、j , j − 1 , ………… , − j + 1 , − j

ダイソン級数

https://mmatsuo.com/ 行列の微分方程式とダイソン級数のキモチ -1- 形式 / より

次の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dt}f(t)=A(t)f(t) \qquad (1) \qquad A(t)\text{は時間依存する要素を持つ d 次正方行列、}f(t)\text{は d 次元ベクトル}$$

すると、この形式解は時間順序積 T を用いて、

$$f(t)=T\,exp\Big(\int_{t_0}^{t}d\tau\,A(\tau)\Big)f(t_0) \qquad (2)$$

と表せる。

ここで

$$T\,exp\Big(\int_{t_0}^{t}d\tau\,A(\tau)\Big)f(t_0):=\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t}dt''\cdots\cdots\int_{t_0}^{t}dt^{(n)}\,T\Big\{A(t')A(t'')\cdots\cdots A(t^{(n)})\Big\} \qquad (3)$$

はダイソン級数と呼ばれている。

T は時間順序積（あるいは T 積）と呼ばれていて、

$$T\Big\{A(t')A(t'')\cdots A(t^{(n)})\Big\}$$

は A の引数 $t', t'', \cdots, t^{(n)}$ が、左方ほど大きくなるように並べ替えた積を意味する。

例えば $n=2$ のときは、

$$T\Big\{A(t')A(t'')\Big\}=\begin{cases}A(t')A(t'') & t'>t'' \\ A(t'')A(t') & t'<t''\end{cases}$$

ステップ関数 $\theta(t)$（$t>0$ のとき $\theta(t)=1$，$t<0$ のとき $\theta(t)=0$）を使うと、

$$T\Big\{A(t')A(t'')\Big\}=\theta(t'-t'')A(t')A(t'')+\theta(t''-t')A(t'')A(t')$$

説明 ―――――――――――――――――――――――――――――――――

微分方程式

$$\frac{d}{dt'}f(t')=A(t')f(t')$$

の両辺を t' について t_0 から t まで積分してみる（t' の積分範囲は t_0 から t まで）。

$$f(t)=f(t_0)+\int_{t_0}^{t}dt'\,A(t')f(t')$$

この式で、$t\to t'$、$t'\to t''$ と置き換えると（t'' の積分範囲は t_0 から t' まで）、

$$f(t')=f(t_0)+\int_{t_0}^{t'}dt''\,A(t'')f(t'')$$

同様の置き換えで（$t^{(n)}$ の積分範囲は t_0 から $t^{(n-1)}$ まで）、

$$f(t^{(n-1)})=f(t_0)+\int_{t_0}^{t^{(n-1)}}dt^{(n)}\,A(t^{(n)})f(t^{(n)}) \qquad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

これらの式を逆方向（上方向）に向かって代入していくと、

$$f(t)=f(t_0)\Big(1+\int_{t_0}^{t}dt'\,A(t')+\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t'}dt''\,A(t')A(t'')+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t'}dt''\cdots\int_{t_0}^{t^{(n-1)}}dt^{(n)}A(t')A(t'')\cdots A(t^{(n)})+\cdots\cdots\cdots\Big) \qquad (4)$$

ただし、$t\geq t'\geq t''\geq\cdots\geq t^{(n)}\geq\cdots\geq t_0$ という制限があり、さらに $A(t'), A(t'')\cdots$ は一般に交換しないことに注意。

(4) の $A(t)$ は時間の順序に並んでいる。しかし、場の時間順序積を使うことにより、この積分区間への制限を取り払うことができる。＝ (4) を (3) $\frac{1}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t}dt''\cdots\cdots\int_{t_0}^{t}dt^{(n)}\,T\Big\{A(t')A(t'')\cdots\cdots A(t^{(n)})\Big\}$ の形にできる。

もっとも簡単な $n=2$ のときについて、どのように次の式が成り立つようになるのか見ておこう。

$$\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t'}dt''\,A(t')A(t'')=\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t}dt''\,T\Big\{A(t')A(t'')\Big\}$$

左辺の 2 重積分の 2 つめの積分区間を t' から t まで延長する（$t_0\sim t'$ を延長して、$t'\sim t$ のものを付け加える）。

$$\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t'}dt''\,A(t')A(t'')=\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t'}dt''\,A(t')A(t'')+0\times\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t'}^{t}dt''\,A(t')A(t'') \qquad 0\text{ を掛けたものを付け加えただけ}$$

すると、この右辺はステップ関数を使ってひとまとめにできる。（t'' が t' より大きくなったときは 0 にすることに

より、積分区間の上限を t に揃えることができる。）

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \,\theta(t'-t'')\, A(t')\, A(t'') \qquad \theta(t'-t'') \text{ は } t' > t'' \text{ のとき } 1\text{、} t' < t'' \text{ のとき } 0$$

右辺は t' と t'' を入れ替えても積分の値は変わらないので、

$$\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \, A(t')\, A(t'') = \frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \,\theta(t'-t'')\, A(t')\, A(t'') + \int_{t_0}^{t} dt'' \int_{t_0}^{t} dt' \,\theta(t''-t')\, A(t'')\, A(t') \right)$$

$$= \frac{1}{2!} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \, T\left\{ A(t')\, A(t'') \right\}$$

多重積分の変数変換とヤコビアン

ヤコビ行列

$y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, m$

$\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ を ij 成分とする $m\times n$ 行列 J をヤコビ行列と言う。

$$J = \begin{pmatrix} \partial y_1/\partial x_1 & \partial y_1/\partial x_2 & \cdots\cdots & \partial y_1/\partial x_n \\ \partial y_2/\partial x_2 & \partial y_2/\partial x_2 & \cdots\cdots & \partial y_2/\partial x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial y_m/\partial x_1 & \partial y_m/\partial x_2 & \cdots\cdots & \partial y_m/\partial x_n \end{pmatrix}$$

多変数関数において、接線の傾きに相当するのがヤコビ行列である。

$$d\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = J\, d\boldsymbol{x}$$

ヤコビアン

ヤコビ行列が正方行列である場合、その行列式をヤコビ行列式、またはヤコビアンと言う。ヤコビアンは変換の「拡大率」を表す重要な量で、多重積分の変数変換公式で現れる。

例　三次元極座標

変換式は、$x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

ヤコビ行列は、

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

ヤコビアンは、

$$|J| = r^2\sin\theta$$

となる。

多重積分の変数変換は、このヤコビアンで

$$dx\,dy\,dz \Rightarrow r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

と変換される。

多重積分の変数変換とヤコビアン

多重積分　$I = \int\int \cdots\cdots \int f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots\cdots dx_n$　①

多重積分で変数を変換した場合どうなるかみてみる。

簡単のため 2 重積分で考える。

$$I = \iint_R f(x, y)\, dxdy \qquad R \text{ は積分領域} \qquad ②$$

変数 x, y を

$$x = \varphi(u, v)\ ,\ \ y = \phi(u, v) \qquad ③$$

によって別の変数 u, v に変える場合を考える。

（これらの関数は連続で微分可能、かつ (x, y) と (u, v) との対応は一義的であるとする。）

(x, y) での積分領域 R に対して、(u, v) での積分領域は T とする。関数 $f(x, y)$ を x, y について変域 R で積分することは、変数 u, v についていえば変域 T 内に積分することに相当する。

しかしここで次のようにしてはならない。

$$I = \iint_T f(\varphi(u, v), \phi(u, v))\, dudv \qquad \leftarrow \text{これは間違い}$$

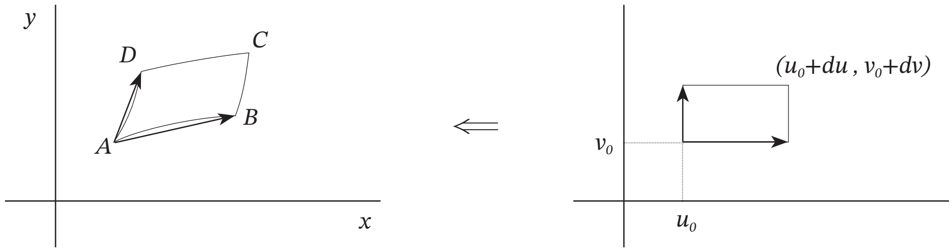
なぜなら、$dxdy$ と $dudv$ は等しくないからである。
②式は、x , y 平面を各座標軸に平行な直線で細分し、その各細片の面積 $dxdy$ に、その場所の f の値を乗じたものをよせ集めたものである。変数を u , v に変えたときには、平面の細分の仕方が変わって、面積 $dxdy$ に相当するものが単に $dudv$ では表せなくなる。

1 変数の場合、置換積分は次のようなものであった。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

$$x = g(t) \to \frac{dx}{dt} = g'(t) \to dx = g'(t)dt$$

ここで $g'(t)$ という係数は変数変換の際に発生した縮尺を合わせるための係数となっている。
多変数の場合も同様に、積分変数の変換を行うときは縮尺をそろえてやる必要がある。つまり、両空間（変換元と変換先）の T と R の積分領域面が一致するように縮尺を合わせてやるのである。そのためには、(u , v) 平面内の領域 T から (x , y) 平面の領域 R への写像③によって、$dudv$ がどのように写されるか見てみればよい。（変換後は $dudv$ での積分になるわけだが、その $dudv$ は (x , y) 空間ではどのような形をしているのか。）
(u , v) 平面内で、変域 T を、無数の直線で細かい網目に分割したとする。そしてその中で、 1 つの微小長方形の部分を考えると、その面積は $dudv$ である（右図）。これを (x , y) 平面内でみてみると、右図の直線はいずれも一般に曲線になり、微小な長方形は近似的な微小平行四辺形となる（左図）。



点 $A\ (x(u_0 , v_0) , y(u_0 , v_0))$ から u , v がそれぞれ du , dv だけ増加したときの点を考える。
それぞれの座標は次のようになる。

$$A\ (x(u_0 , v_0) , y(u_0 , v_0))$$

$$B\ (x(u_0+du , v_0) , y(u_0+du , v_0)) \approx (x(u_0 , v_0) + \frac{\partial x}{\partial u}du , y(u_0 , v_0) + \frac{\partial y}{\partial u}du)$$

$$C\ (x(u_0+du , v_0+dv) , y(u_0+du , v_0+dv)) \approx ....$$

$$D\ (x(u_0 , v_0+dv) , y(u_0 , v_0+dv)) \approx (x(u_0 , v_0) + \frac{\partial x}{\partial v}dv , y(u_0 , v_0) + \frac{\partial y}{\partial v}dv)$$

$$\overrightarrow{AB} = (\frac{\partial x}{\partial u}du , \frac{\partial y}{\partial u}du) \quad , \quad \overrightarrow{AD} = (\frac{\partial x}{\partial v}dv , \frac{\partial y}{\partial v}dv)$$

平行四辺形の面積 $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$ は、行列式で

$$S = \left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{pmatrix} \right| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| dudv = \| J \| \, dudv \qquad \frac{\partial(x , y)}{\partial(u , v)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ で表すことも多い。

と計算できる。（面積の拡大率だけが必要なので絶対値をとる。2 重線は行列式と絶対値をとるという意味。）

したがって、③の関係によって変数が (x , y) から (u , v) に変換された場合、積分②は

$$I = \iint_T f(\varphi(u , v) , \phi(u , v)) \| J \| \, dudv \qquad \| J \| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\|$$

という形に変換される（面積の拡大率だけが必要なので行列式は絶対値をとっている。）

汎関数と変分法

変分法

独立変数 x、およびその関数 $u(x)$ を含む一つの定積分 I があるとする。この定積分の中には、関数 u の導関数 $u'(x)$，$u''(x)$，……… を含んでいてもよい。この定積分の値は u の関数形によって、大きくなったり小さくなったりする。つまり、u の関数形によって変化する。この意味で、I は関数の関数である。このような関数の関数のことを汎関数と呼ぶ。

変分法とは、汎関数 I が極大または極小値（いわゆる停留値）をとるような $u=\phi_0(x)$ の関数形を求める問題をいう。たとえば、独立変数 x と関数 $u(x)$、$u'(x)$ とを含む与えられた関数 $f(x, u, u')$ の定積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2} f(x\,,u\,,u')\,dx$$

が停留値をとるような関数 $u=\phi_0(x)$ を求める問題である。

ϕ_0 が求める関数ならば、u を ϕ_0 の近くで第 1 次の微小量 δu だけ変化させても、I の変化 δI はない（正確いえば、たかだか第 2 次の微小量の変化である）。すなわち、

$$\delta I=0$$

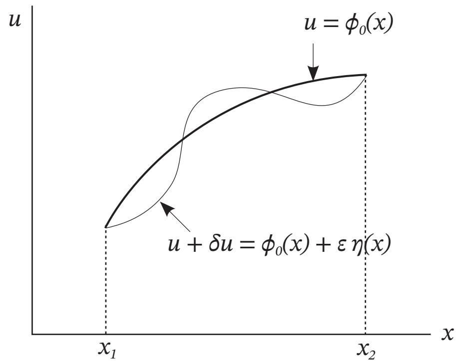
オイラーは、この条件（$\delta I=0$）が、u に対するひとつの微分方程式を与えることを示した。

ここで、

$$\delta u=\varepsilon\,\eta(x)$$

とおこう。$\eta(x)$ は、$\eta(x_1)=0$，$\eta(x_2)=0$（両端では 0）を満たす以外は任意の連続関数で、かつ $\eta'(x)$ も連続関数であるとする。

ε は第 1 次の微小量を表わす。



$I-I_0$ を計算してみる。

$$I-I_0=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x\,,\phi_0+\varepsilon\,\eta\,,\phi_0'+\varepsilon\,\eta')-f(x\,,\phi_0\,,\phi_0')\}\,dx$$

これをテイラー展開すると、

$$=\varepsilon\int_{x_1}^{x_2}\{\,\eta(x)\frac{\partial f}{\partial u}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial u'}\,\}\,dx+O(\varepsilon^2)$$

1 次までのテイラー展開　$f(x\,,\phi_0+\varepsilon\,\eta\,,\phi_0'+\varepsilon\,\eta')=f(x\,,\phi_0\,,\phi_0')+\delta u\frac{\partial f}{\partial u}+\delta u'\frac{\partial f}{\partial u'}=f(x\,,\phi_0\,,\phi_0')+\varepsilon\{\,\eta(x)\frac{\partial f}{\partial u}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial u'}\,\}$

そこで、$\delta I=0$ より

$$\int_{x_1}^{x_2}\{\,\eta(x)\frac{\partial f}{\partial u}+\eta'(x)\frac{\partial f}{\partial u'}\,\}\,dx=0$$

部分積分を使って、

$$\left|\eta(x)\frac{\partial f}{\partial u'}\right|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\{\,\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial u'})-\frac{\partial f}{\partial u}\,\}\,dx=0$$

$\eta(x_1)=0$，$\eta(x_2)=0$ より、第 1 項は 0 となる。また、どのような $\eta(x)$ に対しても第 2 項が 0 となるためには

$$\frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial u'})-\frac{\partial f}{\partial u}=0$$

これが変分法に関するオイラーの微分方程式と呼ばれるものである。

汎関数微分

再確認

汎関数 $F(q(t))$ が極値をとる関数 $q(t)$ を求める問題のことを変分問題といい、変分問題を解くための手続きが変分法である。

変分とは、汎関数に入力する関数 $q(t)$ を微小量 $\delta q(t)$ だけ変化させたときの $F(q(t))$ の変化

$$\delta F=F(q(t)+\delta q(t))-F(q(t))$$

のことであり、汎関数の極値問題においては、

$$\delta F=0$$

を極値条件として用いる。

【汎関数微分の定義】
関数 $q(t)$ を

$$q(t) \quad \rightarrow \quad q(t) + \delta q(t)$$

とわずかに変化させたとき、汎関数 $F(q(t))$ の微小変化（1 次）は

$$\delta F = F(q(t) + \delta q(t)) - F(q(t)) = \int \frac{\delta F}{\delta q}\, \delta q(t)\, dt \qquad *$$

であるとしたときの $\frac{\delta F}{\delta q}$ を、汎関数微分と呼ぶ。$\frac{\partial F}{\partial q}$ と書く場合もある。

* から明らかなように、

$\frac{\delta F}{\delta q} = 0$（汎関数微分 $= 0$） $\Leftrightarrow$ $\delta F = 0$（汎関数の変分 $= 0$）

【汎関数微分の計算】
汎関数 $F(q)$ の中に $q(t)$ の t 微分が現れないなら、汎関数 $F(q)$ を普通の変数のように微分してよいが、汎関数 $F(q)$ が $q(t)$ の t 微分 $\dot{q}(t)$ を含む場合は、そう単純ではない。$\delta q(t)$ が、$\dot{q}(t)$ に及ぼす影響を考えなければならないからである。

例　$F(q) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t)$

この場合の変分は、$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} dt \{ L(q+\delta q, \frac{d}{dt}(q+\delta q), t) - L(q, \dot{q}, t) \}$

前記と同じ計算になるが、テイラー展開と部分積分を使って、

$$L(q+\delta q, \frac{d}{dt}(q+\delta q), t) = L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) \qquad \frac{d}{dt}\delta q = \delta\dot{q}$$

$$= L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta\dot{q} + O(\delta q^2)$$

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dt \,(\frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta\dot{q})$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dt \,(\frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\, \delta q) + \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta q \right|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dt \,(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}))\, \delta q$$

$\frac{\delta F}{\delta q}$ の定義（$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta q}\, \delta q(t)\, dt$）より、

$$\therefore\ \frac{\delta F}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})$$

つまり、これが作用に対応する汎関数微分の形である。
最小作用の原理をこの結果に適用してみると、汎関数微分 $= 0$ の条件は、

$$\frac{\delta F}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = 0$$

これが、オイラー・ラグランジュ方程式である。　https://qiita.com/warper/items/8f49b0680d5010173e54

//

F の汎函数微分 $\frac{\delta F}{\delta q}$ とは、任意の試験函数 f に対して次のように定義される。

$$\frac{\delta F(q(t))}{\delta q(t)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(q(t) + \varepsilon f(t)) - F(q(t))}{\varepsilon}$$

物理では、一般の試験函数 $f(t)$ ではなくてディラックのデルタ函数 $\delta(t-\tau)$ を用いることが多い。

$$\frac{\delta F(q(t))}{\delta q(\tau)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(q(t) + \varepsilon\, \delta(t-\tau)) - F(q(t))}{\varepsilon}$$

$$= \left. \frac{dF(q(t) + \varepsilon\, \delta(t-\tau))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = 0}$$

参考　偏微分：$\dfrac{\partial f(x_i)}{\partial x_j} = \lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{f(x_i + \varepsilon\,\delta_{ij}) - f(x_i)}{\varepsilon}$　　　$f(x_i) = f(x_1, x_2, \cdots\cdots)$

変数 x の添え字が、離散変数の場合が偏微分、連続変数の場合が汎関数微分ということになる。
また、全微分 df 及び変分 δF は、それぞれ次のように表わせる。

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \qquad \delta F = \int \frac{\delta F}{\delta q}\, \delta q(t)\, dt$$

//
若干の公式と計算例　　　　「量子力学 / 場の正準方程式」参照

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(x')} = \delta(x - x') \qquad \frac{\delta \dot{\phi}(x)}{\delta \dot{\phi}(x')} = \delta(x - x') \qquad \int f(x)\, \delta(x - x')\, dx = f(x')$$

$$\frac{\delta F(\phi(x))}{\delta \phi(x')} = \frac{\partial F(\phi(x))}{\partial \phi(x)} \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(x')} = \frac{\partial F(\phi(x))}{\partial \phi(x)} \delta(x - x')$$

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x')} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x')$$

$F(\phi) = \int d^3x\, \phi(\boldsymbol{x})$ のとき、$\dfrac{\delta F(\phi)}{\delta \phi(\boldsymbol{x})} = \int d^3y \dfrac{\delta \phi(\boldsymbol{y})}{\delta \phi(\boldsymbol{x})} = \int d^3y\, \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = 1$

$S(\phi) = \int d^3x\, F(\phi(x))$ のとき、$\dfrac{\delta S}{\delta \phi(y)} = \int d^3y \dfrac{\partial F}{\partial \phi} \dfrac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \int d^3y \dfrac{\partial F}{\partial \phi} \delta^3(x - y) = \dfrac{\partial F}{\partial \phi}(y)$

$S(\phi) = \int d^4x\, L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ のとき、

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta \phi(y)} \int d^4x\, L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) &= \int d^3x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta(\partial_\mu \phi(x))}{\delta \phi(y)} \right) \\
&= \int d^3x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta^4(x - y) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta^4(x - y) \right) \\
&= \int d^3x \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \delta^4(x - y) - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta^4(x - y) \right) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \phi}(y) - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}(y)
\end{aligned}$$