解析力学

目次

解析力学

https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/? 解析力学

ラグランジュ力学

力学系の運動エネルギーを T、ポテンシャルエネルギーを U とするとき、ラグランジアン L を、

$$L = T - U$$

として定義すると、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

がニュートンの運動方程式と同等の運動方程式を与える。（「最小作用の原理」参照）

1 粒子の一次元運動で確かめてみると、

$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - U(x)$ より $\frac{d}{dt}\underbrace{(m\dot{x})}_{\text{運動量}} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial x}}_{\text{力}}$ となって、確かにニュートン方程式が出てくる。

ポテンシャルエネルギーの勾配が力を与えることを思いだそう。

ラグランジアンはエネルギーの次元を持つスカラーであるが、観測可能な物理量ではなく、その値自体に物理的な意味があるわけではない。特に、座標と時間の任意関数 $f(q,t)$ の時間による全微分を加える変換

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}f(q,t)$$

を行っても全く同じ力学系を表す（「最小作用の原理」)。

ラグランジュ力学は「座標の取り方にかかわらず基礎方程式が同じ形になる」という点で、ニュートン方程式よりも優れている。ラグランジュの運動方程式は座標変換に対して形を変えない（共変性を持つ)。

θ を位置座標に取った場合、ラグランジュの運動方程式に出てくる $\partial L/\partial\dot{\theta}$ は運動量そのものではないし、$\partial L/\partial\theta$ は力そのものではないのだが、運動量の概念を拡張して、任意の座標 q_k に対して、

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

を 一般化運動量（あるいは正準運動量） と呼ぶ。

このとき運動方程式は、

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

と表される。

L は一般に座標と速度、そして時間の関数として $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ と書けるが、上記のように一般化運動量 p_k を定義すると、その全微分を、

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}d\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt \\ &= \sum_{k=1}^{n}(p_k\,d\dot{q}_k + \dot{p}_k\,dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t}dt \end{aligned}$$

と書き表せる。（ラグランジアンの全微分）

▍ハミルトニアンとエネルギー保存

上の式を形式的に dt で割れば、任意の L に対して

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{k=1}^{n}(p_k\ddot{q}_k + \dot{p}_k\dot{q}_k) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \qquad H = \sum_{i=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L$$ （ルジャンドル変換　次の「ハミトン力学」参照）

とできる。

この式は $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ となる系では $\dot{H} = 0$ すなわち H が時間に対して変化しない「保存量」となることを示している。

これはポテンシャルエネルギー U が時間に依存しない「孤立系」では常に成り立つ。

この H はハミルトニアンと呼ばれ、実は系のエネルギーに相当する。

確かめてみる。

$$L = \frac{1}{2} m\, |\dot{\boldsymbol{x}}|^2 - U(\boldsymbol{x})$$

に対して、

$$H = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} - [\frac{1}{2} m\, |\dot{\boldsymbol{x}}|^2 - U(\boldsymbol{x})] \qquad \boldsymbol{p} = m\, \dot{\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{1}{2} m\, |\dot{\boldsymbol{x}}|^2 + U(\boldsymbol{x})$$

$$= T + U$$

たしかにエネルギーが出てくる。そして孤立系でエネルギーが保存するのは当然でもある。

ハミルトン力学

ハミルトニアンは系全体のエネルギーを表す関数のことです。 だから、ハミルトニアンが一定ならエネルギーが保存します。 別にハミルトニアンがなくても、全エネルギーは運動エネルギーと位置エネルギーを足したものとしてこと足りるはずです。 しかしハミルトニアンにはちょっとだけ約束があります。 それは位置 q と運動量 p を使うことです。($L(q, \dot{q}, t)$ に対して、$H(p, q, t)$)

ハミルトニアンは一般化座標、一般化運動量、および時間の関数として書かれた量であり、引数が違えば大きさが同じであってもハミルトニアンではない。 ハミルトニアンを定義式内の一般化速度は一般化運動量の定義式を逆に解いて一般化座標、一般化運動量、および時間の関数 $\dot{q}_i(p, q, t)$ として書かれている。

例えば、

$$H(p, q; t) = T + U = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

ハミルトニアンはラグランジアンから

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L$$

で定義される。

//

ルジャンドル変換とハミルトニアン　　https://www.sanken.osaka-u.ac.jp/~sudoh/chapter8.pdf

ルジャンドル変換とは、関数の変数を変えるための変換である。

ここでは、簡単のため、２変数関数 $f(x, y)$ のルジャンドル変換についてとりあげる。まず、変数 u と v を

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\quad v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

と定義しておく。関数 $f(x, y)$ の持つ情報を失うことなく、独立変数を x から u に変えたり、y から v に変えたりするのが、ルジャンドル変換である。

関数 f の全微分は、以下のように書ける。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = u\, dx + v\, dy$$

新しい量 g を、

$$g = f - u\, x$$

と定義する。g の全微分を計算してみると、

$$dg = df - u\, dx - x\, du = u\, dx + v\, dy - u\, dx - x\, du = -x\, du + v\, dy$$

となって、g の独立変数が (u, y) であることが分かる（$x = -\frac{\partial g}{\partial u}$）。このようにして、関数 $f(x, y)$ から $g(u, y)$ に変換することを、関数 $f(x, y)$ を変数 x についてルジャンドル変換すると言う。このとき、$g(u, y)$ は、$f(x, y)$ と全く同じ情報を持っている。

関数 $f(x, y)$ を x と y についてルジャンドル変換する場合には、新しい量を

$$h = f - u\, x - v\, y$$

と定義する。h の全微分を計算してみると、

$$dh = -x\, du - y\, dv$$

であり、確かに h の独立変数が u と v になっていることが分かる。

ラグランジアン $L(q, \dot{q})$ の独立変数は q と $\dot{q}$ である。ラグランジアンを $\dot{q}$ についてルジャンドル変換する。

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L \qquad (p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ ,\quad \dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k})$$

を定義し、新しい量 H のことをハミルトニアンと呼ぶ。ハミルトニアンの全微分を計算すると、

$$dH = \sum_{k=1}^{n} (\, dp_k\, \dot{q}_k - \dot{p}_k\, dq_k\,)$$

計算は次の「ハミルトンの運動方程式」を参照

となり、H の独立変数が p と q であることが分かる。$H = H(q, p) \quad \rightarrow \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\ ,\quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

▍ハミルトンの運動方程式

ハミルトニアンの全微分を求めると、

$$H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L$$

$$dH = \sum_{k=1}^{n} (dp_k \dot{q}_k + p_k d\dot{q}_k) - dL$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (dp_k \dot{q}_k + p_k d\dot{q}_k) - \{ \sum_{k=1}^{n} (p_k d\dot{q}_k + \dot{p}_k dq_k) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \} \qquad \leftarrow \text{前ページ「ラグランジアンの全微分」参照}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (dp_k \dot{q}_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

であるから、ハミルトニアンを位置と運動量と時刻の関数として $H(q_1, q_2, \dots , q_n, p_1, p_2, \dots , p_n, t)$ と書けば、

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} , \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

が成り立ち、前二者の関係はハミルトンの正準方程式（運動方程式）と呼ばれる。（普通はハミルトニアンやラグランジアンは時間 t を陽に含まないから、その場合は最後の式は 0 である。）

ここでの $\frac{\partial}{\partial q_k}$ は p_k を固定した偏微分となっており、ラグランジュの運動方程式での $\frac{\partial}{\partial q_k}$ が $\dot{q}_k$ を固定した偏微分であったのとは異なることに注意が必要である。

▍正準変換（ハミルトニアンの利点）

ラグランジュの力学は座標系 $q_1, q_2, \dots , q_n$ から別の座標系 $Q_1, Q_2, \dots , Q_n$ への座標変換

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots , q_n) \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

に対して共変性を持つのだが、ハミルトン力学では p_i , q_i を独立な変数と見なして、

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots , q_n, p_1, p_2, \dots , p_n) \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

のように座標と運動量とが入り交じった変換（正準変換という）を行ったとしても共変になるため、さらに広範な応用を持つ。

変数変換 $(q, p) \to (\mathrm{Q}, \mathrm{P})$: $\mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}_i(q, p, t)$, $\mathrm{P}_i = \mathrm{P}_i(q, p, t)$ によって、ハミルトニアンも変換 $H(q, p) \to \mathscr{H}(\mathrm{Q}, \mathrm{P})$ を受ける。このとき

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} , \quad \frac{d\mathrm{P}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathrm{P}}$$

が成り立つような変換を正準変換という。つまり，正準運動方程式が形式的に変わらない変換を正準変換という。

正準変換を構成するには，次のような母関数を用いるのが便利である。これは「ラグランジアンに時間の全微分 $\frac{dF}{dt}$ を加えても，作用積分の変分（従って運動方程式）は変わらない」という性質を利用する。（$\delta S = 0$ のときに $\delta S' = 0$ であるためには、作用の被積分関数の差が時間の全微分であればよいことになる。）

$$L = p \dot{q} - H(q, p)$$

$$= \mathrm{P} \dot{\mathrm{Q}} - \mathscr{H}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) + \frac{dF}{dt}$$

$$\therefore \ dF = p\, dq - \mathrm{P}\, d\mathrm{Q} + (\mathscr{H} - H)dt$$

これより、$F(q, \mathrm{Q}, t)$ を母関数とすると、

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} , \quad \mathrm{P} = -\frac{\partial F}{\partial \mathrm{Q}} , \quad \mathscr{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad \leftarrow \quad dF(q, \mathrm{Q}, t) = \frac{\partial F}{\partial q} dq + \frac{\partial F}{\partial \mathrm{Q}} d\mathrm{Q} + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

を得る。

$p = \frac{\partial F}{\partial q}$, $\mathrm{P} = -\frac{\partial F}{\partial \mathrm{Q}}$ なので、この F を適当にルジャンドル変換すれば、関係式を入替えることができる。

例えば 、$C(q, \mathrm{P}, t) = F(q, \mathrm{Q}, t) + \mathrm{Q}\, \mathrm{P}$ を母関数とすると、(他にも、$B(p, \mathrm{Q}, t) = F - p\, q$ 、$A(p, \mathrm{P}, t) = F - p\, q + \mathrm{Q}\, \mathrm{P}$)

$$p = \frac{\partial C}{\partial q}\,,\quad \mathrm{Q} = \frac{\partial C}{\partial \mathrm{P}}\,,\quad \mathscr{H} = H + \frac{\partial C}{\partial t} \qquad *1$$

特に $C = q\,\mathrm{P}$ のときは、

$$\mathrm{Q} = \frac{\partial C}{\partial \mathrm{P}} = q\,,\quad p = \frac{\partial C}{\partial q} = \mathrm{P}\,,\quad \mathscr{H} = H$$

であり、これは恒等変換である。

そこで、ϵ を微小パラメータとして、恒等変換と少しだけ違う正準変換

$$C = q\,\mathrm{P} + \epsilon\,G(q, \mathrm{P})$$

を考える。このような G を無限小変換の生成子 (generator) という。このとき *1 の $p = \frac{\partial C}{\partial q}$，$\mathrm{Q} = \frac{\partial C}{\partial \mathrm{P}}$ より

$$\mathrm{P} = p - \epsilon\frac{\partial G}{\partial q}\,,\quad \mathrm{Q} = q + \epsilon\frac{\partial G}{\partial \mathrm{P}} \approx q + \epsilon\frac{\partial G}{\partial p} \qquad *2$$

を得る。Q に関しては、ϵ の 1 次近似までを取る意味で、G と微分の変数 P を p に置き換えている。

無限小変換の例

【空間並進】

空間並進 $x \to X = x + \epsilon$ を生成する母関数は

$$C = x\,\mathrm{P} + \epsilon\,\mathrm{P} \approx x\,\mathrm{P} + \epsilon\,p$$

である。

すなわち、空間並進の生成子は運動量である。

【空間回転】

空間回転 $x_1 \to X_1 = x_1 - \epsilon\,x_2$，$x_2 \to X_2 = x_2 + \epsilon\,x_1$ を生成する母関数は

$$C = x_1\,\mathrm{P}_1 + x_2\,\mathrm{P}_2 + \epsilon\,(x_1\,\mathrm{P}_2 - x_2\,\mathrm{P}_1) \approx x_1\,\mathrm{P}_1 + x_2\,\mathrm{P}_2 + \epsilon\,(x_1\,p_2 - x_2\,p_1)$$

である。

$x_1\,p_2 - x_2\,p_1 = L_3$ なので、空間回転の生成子は角運動量である。

【時間並進】

時間並進 $t \to T = t + \epsilon$ を生成する母関数は

$$x(t+\epsilon) - x(t) = \epsilon\,\dot{x} = \epsilon\,\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$p(t+\epsilon) - p(t) = \epsilon\,\dot{p} = -\,\epsilon\,\frac{\partial H}{\partial x}$$

より、時間並進の生成子はハミルトニアンである。

▌ポアソン括弧式

http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~teiji.kunihiro/QM_suppl/Cl-Mech-wo-wave.pdf

ポアソン括弧式（定義）

$$\{A, B\} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial B}{\partial q_k}\frac{\partial A}{\partial p_k}\right)$$

性質

1. 反対称性　$\{A, B\} = -\,\{B, A\}$
2. 線形性　λ_1, λ_2 が正準変数を含まないとき、$\{A, \lambda_1 B + \lambda_2 C\} = \lambda_1\{A, B\} + \lambda_2\{A, C\}$
3. 　$\{AB\,, C\} = A\,\{B, C\} + \{A, C\}\,B$
4. ヤコビの恒等式　$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{B, A\}\} = 0$

Poisson 括弧を用いた正準方程式の表現

$$\dot{q}_i = \{q_i\,, H\} \qquad \dot{p}_i = \{p_i\,, H\}$$

ハミルトン形式において物理量は一般化座標、一般化運動量、および時間の関数 $A(p, q, t)$ として書かれる。物理量の時間微分は

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_k\frac{\partial A}{\partial q_k} + \frac{\partial A}{\partial p_k}\dot{p}_k\right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial A}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial A}{\partial t} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

となる。

A が t を陽にに含んでいない ($\frac{\partial A}{\partial t}=0$) とき、

$$\dot{A}=\{A,H\}$$

従ってこのとき、A が保存量 $\Leftrightarrow \{A,H\}=0$

特にハミルトニアンの時間微分は

$$\dot{H}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

である。

基本 Poisson 括弧式　$\{q_i, q_j\}=\{p_i, p_j\}=0$　　$\{q_i, p_j\}=\delta_{ij}$

角運動量の Poisson 括弧

角運動量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$　成分で書くと、$L_i=\varepsilon_{ijk}x_j p_k$　$(i=1;2;3)$

ここに、ε_{ijk} はレビ・チビタの完全反対称テンソル。

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\}&=\{\varepsilon_{ilk}x_l p_k, \varepsilon_{jmn}x_m p_n\}\\
&=\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}\{x_l p_k, x_m p_n\}\\
&=\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}[x_l\{p_k, x_m p_n\}+\{x_l, x_m p_n\}p_k]\\
&=\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}[x_l\{p_k, x_m\}p_n+x_m\{x_l, p_n\}p_k]\\
&=\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}[-\delta_{km}x_l p_n+\delta_{ln}x_m p_k]\\
&=-\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jkn}x_l p_n+\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jml}x_m p_k\\
&=-(-\delta_{ij}\delta_{ln}+\delta_{in}\delta_{lj})x_l p_n+(-\delta_{ij}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{kj})x_m p_k\\
&=\delta_{ij}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}-x_j p_i-\delta_{ij}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}+x_i p_j\\
&=x_i p_j-x_j p_i\\
&=\varepsilon_{ijk}L_k
\end{aligned}$$

ここで、$\varepsilon_{ijk}L_k=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=x_i p_j-x_j p_i$ となることを用いた。

【正準変換に対してポアソン括弧は不変である】

正準変換 $(q,p)\to(\mathrm{Q},\mathrm{P})$ に対して、$\{A,B\}_{p,q}=\{A,B\}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}$

「正準変換」でみた *2 式 $\mathrm{Q}=q+\epsilon\frac{\partial G}{\partial p}$ ，$\mathrm{P}=p-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q}$ より、

$$\frac{\partial}{\partial q}=\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q}\frac{\partial}{\partial \mathrm{Q}}+\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q}\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}=\left(1+\epsilon\frac{\partial^2 G}{\partial q\,\partial p}\right)\frac{\partial}{\partial \mathrm{Q}}-\epsilon\frac{\partial^2 G}{\partial q^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}=\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial \mathrm{Q}}+\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}=\epsilon\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{Q}}+\left(1-\epsilon\frac{\partial^2 G}{\partial q\,\partial p}\right)\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}}$$

を使って、

$$\{A,B\}_{p,q}=\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}$$ 　　これに上の式を適用すると（計算は略）

$$=\frac{\partial A}{\partial \mathrm{Q}}\frac{\partial B}{\partial \mathrm{P}}-\frac{\partial B}{\partial \mathrm{Q}}\frac{\partial A}{\partial \mathrm{P}}+O(\epsilon^2)$$ 　　ϵ の 1 次の項は打ち消し合って消える

$$=\{A,B\}_{\mathrm{P},\mathrm{Q}}+O(\epsilon^2)$$

さらに、任意の関数 A について、テイラー展開を使えば，以下の等式が成り立つことが示される。(無限小変換 G に伴う正準変換によって、A はどのように変わるか。)

$$A(\mathrm{Q},\mathrm{P})=A\left(q+\epsilon\frac{\partial G}{\partial p},\ p-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q}\right)$$ 　　← *2　$\mathrm{Q}=q+\epsilon\frac{\partial G}{\partial p}$ ，$\mathrm{P}=p-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q}$

$$=A(q,p)+\epsilon\frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}-\epsilon\frac{\partial G}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p}$$

$$=A(q,p)+\epsilon\{A,G\}$$

つまり、$\epsilon\{A, G\} = \delta A$

これより、このポアソン括弧は、生成子 G の変換による、関数の発展の仕方を与えている。

ここで特に $A = H$ とすると、G が t を陽に含まないならば 、

$H(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = H(q, p) - \epsilon\, dG/dt \qquad \leftarrow \quad \{H, G\} = -dG/dt$

従って、特にハミルトニアンが無限小変換 G で不変ならば、G は保存することがわかる。

無限小変換 G で、$H(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = H(q, p)$ ならば $dG/dt = 0 \qquad \{H, G\} = 0$

これをネーターの定理という。　「解析力学におけるネーターの定理 / ②ハミルトン力学によるネーターの定理」参照

【生成子 G が与える無限小変換がハミルトニアンを不変にするならば、G は保存する】

例

先の「正準変換」で見たように、空間並進の微小変換の生成子は運動量 $G = p$ であった。

このとき、もし空間が一様的（どの座標に移ってもハミルトニアンが変わらない）ならば、運動量 $G = p$ は保存する。つまり運動量とは、空間の一様性からくる保存量で、しかも空間並進の生成子だったのである。

同様に、空間回転の生成子は角運動量 $G = x_1 p_2 - x_2 p_1$（x_3 軸の回転の場合）であり、ハミルトニアンが不変ならば空間の回転対称性（等方性）からくる保存量となる。

また、時間並進（時間を進める変換）の生成子はハミルトニアン H であり、時間を陽に含まないならば、時間の一様性、時間並進対称性の保存量となる。H を時間発展演算子と呼ぶこともある。

最小作用の原理

▌ラグランジュ形式において、作用汎関数はラグランジュ関数の時間積分

$$S[q]=\int_{t_I}^{t_F} L(q(t)\,,\,\dot{q}(t)\,,\,t)\,dt$$

として与えられる。

最小作用の原理（作用の停留条件）から、

$$\delta S=\int_{t_I}^{t_F}\Big[\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}(t)\Big]\,dt \qquad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\Big)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}(t)+\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)\,\delta q$$

$$=\int_{t_I}^{t_F}\Big[\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q\Big]\,dt+\cancel{\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\Big]_{t_I}^{t_F}}-\int_{t_I}^{t_F}\Big[\frac{d}{dt}\,\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)\,\delta q\Big]\,dt$$

$$=\int_{t_I}^{t_F}\Big[\frac{\partial L}{\partial q}\,-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\Big]\,\delta q(t)\,dt$$

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q_k(t)}=\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,=0$$

が導かれる。

▌ハミルトン形式において、作用汎関数は時間積分

$$S[p\,,\,q]=\int_{t_I}^{t_F}\Big[\,\sum_k\,p_k(t)\,\dot{q}_k(t)-H(p,\,q\,;\,t)\,\Big]\,dt$$

として与えられる。

最小作用の原理（作用の停留条件）から、

$$\delta S=\delta\int_{t_I}^{t_F}\Big[\,\sum_k\,p_k\,\dot{q}_k-H\,\Big]\,dt$$

$$=\sum_k\int_{t_I}^{t_F}\Big[\,\delta p_k\,\dot{q}_k+p_k\,\delta\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial q_k}\,\delta q_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\,\delta p_k\,\Big]\,dt \qquad \frac{d}{dt}(p_k\,\delta q_k)=p_k\,\delta\dot{q}_k+\dot{p}_k\delta qk$$

$$=\cancel{\sum_k\big[p_k\,\delta q_k\big]_{t_I}^{t_F}}+\sum_k\int_{t_I}^{t_F}\Big[\,\delta p_k\,\dot{q}_k-\dot{p}_k\,\delta q_k-\frac{\partial H}{\partial q_k}\,\delta q_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\,\delta p_k\,\Big]\,dt$$

$$=\sum_k\int_{t_I}^{t_F}\Big[\,\Big(\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial p_k}\Big)\,\delta p_k-\Big(\dot{p}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}\Big)\,\delta q_k\,\Big]\,dt$$

ハミルトンの運動方程式（正準方程式）

$$\frac{\delta S[p,\,q]}{\delta p_k(t)}=\dot{q}_k(t)-\frac{\partial H}{\partial p_k}=0$$

$$\frac{\delta S[p,\,q]}{\delta q_k(t)}=-\,\dot{p}_k(t)-\frac{\partial H}{\partial q_k}=0$$

が導かれる。

▌場の運動方程式

$$S=\iint\Lambda\,\Big(\,q,\,\frac{\partial q}{\partial x^i}\Big)\,dVdt\,=\int\frac{1}{c}\,\Lambda\,d\Omega$$

$\int\Lambda\,dV$ は系のラグランジアンであり、したがって、Λ は系のラグランジアン密度とみなすことができる。

Λ は、系を記述する量 q と $\dfrac{\partial q}{\partial x^i}$ の関数である。（電磁場では、q は A_i であるが、ここでは簡単のため 1 個の q だけである。系が閉じているという数学的表現は、Λ があからさまに x^i に依存しないことである。）

場の運動方程式は最小作用の原理にしたがって、S を変分することによって求められる。

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\,\delta q+\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\,\delta\,\frac{\partial q}{\partial x^i}\Big)\,d\Omega \qquad q_{,i}=\frac{\partial q}{\partial x^i}$$

$$= \frac{1}{c}\int [\, \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q) - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q \,] d\Omega$$

↑表面積分で消える（表面では $\delta q = 0$）

$$= \frac{1}{c}\int (\frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}})\, \delta q\, d\Omega = 0$$

δq は任意だから、すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0$$　　運動方程式

ネーターの定理

https://ja.wikipedia.org/wiki/ ネーターの定理

物理学において、ネーターの定理（Noether's theorem）は、系に連続的な対称性がある場合はそれに対応する保存則が存在すると述べる定理である。ドイツの数学者エミー・ネーターによって 1915 年に証明され、1918 年に公表された。

ネーターは、アインシュタイン (Albert Einstein）らによっても、数学の歴史において最も重要な女性と評されている。その数奇な生涯は、「https://ja.wikipedia.org/wiki/ エミー・ネーター」に詳しい。

ネーターの定理は、解析力学や場の理論における重要な定理である。

系がある変換に対して記述に変化を受けない場合、その変換をその系の対称性と呼ぶ。特に解析力学においては、変換に対して系の作用積分が変化しない時に、この変換を対称性と呼ぶ。 これは、系の運動方程式は最小作用の原理を通じて定まる為、作用の変分がゼロであれば系の運動方程式は変化しない為である。 ネーターの定理は、ラグランジアンの変数に対する連続的な変換が系の対称性になっている場合に、対称性の下での作用の変分がある保存量の時間についての全微分になるという定理である。

解析力学におけるネーターの定理

①ラグランジュ力学によるネーターの定理

$q = (q_1 , \dots , q_n)$ を一般化座標とし、

$$L(q, \dot q, t)$$

を系のラグランジアンとする。

作用積分

$$S[q] = \int_{t_I}^{t_F} dt\, L(q, \dot q, t)$$

が微小変換

$$t \to t' = t + \delta t ,\quad q^i \to q'^i = q^i + \delta q^i$$

に対して対称性を持つとする。

ここで、この変換は幾つかのパラメータの線型結合で書けるとする。

$$\delta t = \epsilon_r T_r ,\quad \delta q^i = \epsilon_r Q_r^i$$

但し、重複する添え字記号については、アインシュタインの記法に従い、和をとるものとする。 このとき、

$$X_r = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i} \dot q^i \right) T_r + \frac{\partial L}{\partial \dot q^i} Q_r^i \qquad （あるいは、X_r = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} \dot q^i - L \right) T_r - \frac{\partial L}{\partial \dot q^i} Q_r^i ）$$

は保存量

$$\frac{dX_r}{dt} = 0$$

となり、この保存量はポアソン括弧により微小変換

$$\{ t, X_r \} = T_r ,\quad \{ q^i , X_r \} = Q_r^i \qquad (\{ X_r , t \} = T_r ,\quad \{ X_r , q^i \} = Q_r^i)$$

を定める。

導出１　https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/? 解析力学 %2 ネーターの定理 #ic343e17

まずもっとも簡単な場合で、微小な座標変換 $q_i \longrightarrow Q_i = q_i + \delta q_i$ を考える。

この座標変換に対してラグランジアンが対称性を持つとすれば、

$$dL = L(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dot Q_1, \dot Q_2, \dots, \dot Q_n) - L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_n) = 0$$

$$dL = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta \dot q_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \right\} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta \dot q_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta q_i \right\}$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta q_i \right\}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \delta q_i \right\} = 0$$

を得る。ただし途中でラグランジュの運動方程式$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$を使った。

すなわちこのとき、

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \quad （あるいは、\sum_{i=1}^{n}p_i\,\delta q_i）$$

は運動の保存量となる。

実はラグランジアンが完全に対称ではなく、座標変換によって

$$L(Q_1, Q_2, ..., Q_n, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2, ..., \dot{Q}_n)=L(q_1, q_2, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)+dF/dt$$

のように「同値なラグランジアン」を与える場合にも保存量は存在する。 このとき上式の右辺が dF/dt となることから、

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - F$$

が保存量となる。

< このネーターの定理の与える保存量は生成子になっている >

ここでのネーターの定理の与える無限小変換 $\delta q_i=\epsilon\,Q_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ に対する保存量 G_δ は、

$$G_\delta=p_i\,\delta q_i-F_\delta=const. \qquad G_\delta=\epsilon\,G \quad F_\delta=\epsilon\,F(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\delta L=\frac{dF_\delta}{dt}$$

ここから

$$\{\,q_i,\epsilon\,G\,\}=\delta q_i=\epsilon\,Q_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$

つまり、$\epsilon\,\{\,A\,,G\,\}=\delta A$ と同じ式になっている。「ハミルトン力学 / ポアソン括弧式」

が示せる。

まず、次の等式に注意しておく。

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i}=\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}{\partial p_i}\,,\quad \frac{\partial F}{\partial p_i}=\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}{\partial p_i}$$

すると、Poisson 括弧は、

$$\{\,q_i,\epsilon\,G\,\}=\epsilon\,[\,Q_i+(\boldsymbol{p}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k})\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i}\,]$$

と書ける、ところが、この第 2 項はゼロであることを示すことができる。

実際、もとのラグランジアン形式にもどって、$\delta q_i=\epsilon\,Q_i$ に対するラグランジアンの変化を計算すると、

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\delta\boldsymbol{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\delta\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$=\epsilon\,(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{Q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt})$$

$$=\epsilon\,(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{p}\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt})$$

$$\delta L=\epsilon\frac{dF}{dt} \qquad *$$

ここで、次の式に注意すると、

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{\partial F}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\ddot{\boldsymbol{q}}\,,\quad \frac{dQ_i}{dt}=\frac{\partial Q_i}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\ddot{\boldsymbol{q}}$$

すると、* の 2 つの式の $\ddot{\boldsymbol{q}}$ の係数を等値することにより、

$$\boldsymbol{p}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}$$

これで第 2 項が消える。よって、

$$\{\,q_i,\epsilon\,G\,\}=\epsilon\,Q_i=\delta q_i$$

http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~teiji.kunihiro/QM_suppl/Cl-Mech-wo-wave.pdf　p14

導出 2

力学変数 $q^i(t)$ がラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0$$

を満たしているとする。

微小変換

$$t \to t' = t+\epsilon\, T(t)$$
$$q^i(t) \to q_\epsilon^i(t') = q^i(t)+\epsilon\, Q^i(q(t)\,,t)$$
$$= q^i(t'-\epsilon\, T)+\epsilon\, Q^i(q(t'-\epsilon\, T)\,,t'-\epsilon\, T)$$

を考える。

このとき、系が対称性を持つとは、作用積分

$$S[q_\epsilon]=\int_{t_I+\epsilon T}^{t_F+\epsilon T} dt'\, L(q_\epsilon(t')\,,\dot{q}_\epsilon(t')\,,t')$$

を ϵ の関数としてみたとき、

$$\left.\frac{dS[q_\epsilon]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=0$$

となることである。

この微分を計算すると、

$$\left.\frac{dS[q_\epsilon]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\Big[\,L(q(t)\,,\dot{q}(t)\,,t)\,T(t)\,\Big]_{t_I}^{t_F}+\int_{t_I}^{t_F}dt\,\Big[\,\frac{\partial L}{\partial q^i}\left.\frac{dq_\epsilon^{\,i}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left.\frac{d\dot{q}_\epsilon^{\,i}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Big]$$

である。ここで、運動方程式を用いれば、

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}\left.\frac{dq_\epsilon^{\,i}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left.\frac{d\dot{q}_\epsilon^{\,i}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left.\frac{dq_\epsilon^{\,i}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Big)$$

となるので、$\left.\frac{dq_\epsilon^{\,i}}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=-\,\dot{q}^i\,T(t)+Q^i(q(t)\,,t)$ から、

$$\left.\frac{dS_\epsilon}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\Big[\,(\,L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\,)\,T(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,Q^i(q(t)\,,t)\,\Big]_{t_I}^{t_F}$$

従って、

$$(\,L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i\,)\,T(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,Q^i(q(t)\,,t) \qquad (L-p_i\,\dot{q}_i)\,\delta t+p_i\,\delta q_i=const.\quad \delta t=\epsilon\,T\quad \delta q_i=\epsilon\,Q^i$$

が保存する。

ハミルトニアン（$H=p_k\,\dot{q}_k-L$）を用いれば

$$-\,H(p\,,q\,,t)\,T(t)+p_i\,Q^i(q(t)\;,t\,)=const. \qquad -\,H\,\delta t+p_i\,\delta q_i=const.$$

と書けて、ポアソン括弧を用いれば

$$\{\,H\,T-p_i\,Q^i\,,\;t\,\}=T\;,\quad \{\,H\,T-p_i\,Q^i\,,\;q^j\,\}=Q^j$$

を得る。　　「②ハミルトン力学によるネーターの定理」$\{\,A\,,G_\delta\,\}=\delta A$

例　運動量保存則　　http://hooktail.sub.jp/analytic/NoethersTheorem/

質点全体を平行に移動してもラグランジアンは変化しないため $\delta S=0$ が成立する。

質点の個数を N 個として i 番目 の質点の運動量を $\boldsymbol{p}_i$、位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とするとネーターの定理は

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=const.$$

さて、全体を平行移動するのだから、任意の i について $\delta\boldsymbol{r}_i=\epsilon\,\boldsymbol{n}$（$\epsilon$ は微小量）と書けて、

$$\boldsymbol{n}\cdot\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i=const.$$

ここで $\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i$ は系全体の運動量を表している。つまり、これはベクトル $\boldsymbol{n}$ 方向の運動量保存則にほかならない＝運動量保存則は、空間内の平行移動における作用 S の不変性 (空間の並進対称性) から出てくるものなのである。

例　角運動量保存則

質点系全体の一様な無限小回転 $\delta\boldsymbol{\theta} = \epsilon\,\boldsymbol{n}$ を考える。

各質点の変位 $\delta\boldsymbol{r}_i = \epsilon\,\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i$ について ネーターの定理が成立するとき

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i) = const.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{n} \cdot \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = const.$$

つまり、空間の一様な回転 $\delta\boldsymbol{\theta}$ について作用 S が変化しないとき系全体の 角運動量 $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ の成分のうち $\delta\boldsymbol{\theta}$ 方向成分が保存することになる。

②ハミルトン力学によるネーターの定理　「ハミルトン力学 / ポアソン括弧式」参照

ハミルトン力学においてネーターの定理は次のように表現される。

<u>ハミルトニアンがある微少変換 δ について不変であれば δ の生成子 G_δ は時間不変である。</u>

ここで δ の生成子 G_δ とは、δ によるベクトル (q^i, p^i) の増分 $\delta(q^i, p^i)$ が

$$\delta(q^i, p^i) = \left(\frac{\partial G_\delta}{\partial p^i}, -\frac{\partial G_\delta}{\partial q^i}\right)$$

ここでの G_δ は「ハミルトン力学 / ポアソン括弧式」等でみた ϵG と考えればよい。

と表すことのできる量である。　無限小正準変換 「ハミルトン力学 / 正準変換　*2 式」参照

この定義から、ある観測量 $A(q^i, p^i)$ の δ による変化 $\delta A(q^i, p^i)$ は A と G_δ のポアソン括弧により表される。

$$\delta A(q^i, p^i) = \nabla A \cdot \delta(q^i, p^i) = \nabla A \cdot \left(\frac{\partial G_\delta}{\partial p^i}, -\frac{\partial G_\delta}{\partial q^i}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial G_\delta}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i}\frac{\partial G_\delta}{\partial q^i}\right) = \{A, G_\delta\}$$

ハミルトニアンが微少変換 δ について不変ならば、$\delta H(q^i, p^i) = \{H, G_\delta\} = 0$ が成り立つ。ポアソン括弧の反対称性より

$$\{H, G_\delta\} = -\{G_\delta, H\} = -dG_\delta/dt = 0$$

$\dot{A} = \{A, H\}$ 「ハミルトン力学 / ポアソン括弧式」

よって G_δ は時間不変である。

$\left(\frac{\partial A}{\partial p^i}, -\frac{\partial A}{\partial q^i}\right)$ は位相空間上の A の等高線に沿ったベクトルと考えることができる。これを「A が生み出す流れ」と呼ぶと、ポアソン括弧 $\{A, B\}$ は、「B が生み出す流れに沿った A の変化」と考えることができる。ネーターの定理の一般化は次のようになる。

$\{A, B\} = 0$ ならば、$\{B, A\} = 0$

もしくは

A が B の生み出す流れについて不変であるとき、B も A の生み出す流れについて不変である。

ハミルトニアン H は時間変化の生成子であるため、もし H がある観測量 A の生み出す流れについて不変であれば、A は H の生み出す流れ、つまり時間について不変である。

例　運動量

$G_\delta = \epsilon^i p^i$ とすると、$\delta A = \{A, G_\delta\} = \epsilon^i \{A, p^i\} = \epsilon^i \frac{\partial A}{\partial q^i}$

$$A(q^i, p^i) \to A(q^i, p^i) + \epsilon^i \frac{\partial A}{\partial q^i} = A(q^i + \epsilon^i, p^i)$$

よって運動量は空間並進の生成子である。

例　角運動量

$G_\delta = \varepsilon_{ijk}\epsilon^i p^j q^k$ とすると、（page3 参照　ε_{ijk} は レヴィ = チヴィタ記号）

$$\delta A = \{A, G_\delta\} = \varepsilon_{ijk}\epsilon^i \{A,\ p^j q^k\} = \varepsilon_{ijk}\epsilon^i \left(\frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_j q_k}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_j q_k}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\epsilon^i\left(\frac{\partial A}{\partial q_j}q_k - \frac{\partial A}{\partial p_k}p_j\right) = \varepsilon_{ijk}\epsilon^i\left(\frac{\partial A}{\partial q_j}q_k + \frac{\partial A}{\partial p_j}p_k\right)$$

$$A(q^i, p^i) \to A(q^i, p^i) + \varepsilon_{ijk}\epsilon^i\left(\frac{\partial A}{\partial q_j}q_k + \frac{\partial A}{\partial p_j}p_k\right) = A(R^{ij}q^j, R^{ij}p^j)$$

ここで R^{ij}（$R^{ij} = I + \varepsilon_{kij}\epsilon^k = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon^3 & -\epsilon^2 \\ -\epsilon^3 & 1 & \epsilon^1 \\ \epsilon^2 & -\epsilon^1 & 1 \end{pmatrix}$）は無限小回転である。よって角運動量は空間回転の生成子である。

例　エネルギー

$G_\delta = \epsilon H$ とすると、$\delta A = \{A, G_\delta\} = \{A, \epsilon H\} = \epsilon\dfrac{dA}{dt}$

$$A(q^i, p^i) \to A(q^i, p^i) + \epsilon\frac{dA}{dt} = A(q^i(t+\epsilon), p^i(t+\epsilon))$$

よってエネルギーは時間並進の生成子である。

場の理論におけるネーターの定理

場の量を扱う場の解析力学や場の量子論においても、対称性は基本的な概念であり、ネーターの定理がしばしば応用される。ネーターの定理によって導かれる保存則に登場するネーターカレントや、ネーターチャージは特に重要な概念になっている。

力学変数として場 $\phi(x)$ を考え、作用積分を

$$S[\phi] = \int_\Omega d^4x\, L(\phi, \partial\phi, x)$$

とする。
系が座標と場との微小変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$\phi_i(x) \to \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x)$$

に対して対称性をもち、この変換の下で作用 S が不変であるとする。
このとき、ネーターカレント

$$j^\mu \equiv \left(-\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial_\nu\phi_i + \delta_\nu^\mu L\right)\delta x^\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta\phi_i \quad \text{（あるいは、} j^\mu \equiv \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial_\nu\phi_i - \delta_\nu^\mu L\right)\delta x^\nu - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\delta\phi_i\text{）}$$

が保存し、連続の方程式

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

を満たす。

$\delta\phi$ には場自身の変換だけでなく、座標の変換も含んでいる。 現代的な見方では、場の変分として、同一座標値での差を取ったリー微分 $\bar{\delta}\phi(x)$ で記述すると都合がよい。

$$\bar{\delta}\phi_i(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \delta\phi_i(x) - \delta x^\mu\, \partial_\mu\phi_i$$

このとき、ネーターカレントは

$$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\bar{\delta}\phi_i + L\,\delta x^\mu$$

となる。

特に微小変換が次のようなパラメータの線型結合

$$\delta x^\mu = \epsilon^a X^{a\mu}(x)$$

$$\bar{\delta}\phi_i(x) = \epsilon^a \Gamma^a\phi_i(x)$$

で書かれている場合には、ネーターカレントはパラメータの成分毎に

$$j^{a\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\Gamma^a\phi_i + L\,X^{a\mu}$$

と書くことができて、それぞれに連続の方程式

$$\partial_\mu j^{a\mu} = 0$$

を満たす。

ネーターカレントの時間成分を空間積分した

$$Q^a \equiv \int d^3x\, j^{0a}$$

はネーターチャージと呼ばれる。 これは微小変換の生成子 (無限小生成作用素)

$$[\phi_i(x), Q^a] = i\,\Gamma^a\phi_i(x)$$

となる。

詳細は、http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science012.pdf 「場の理論におけるネーターの定理」参照

導出 1　　http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/~watamura/kougi/QFT2012_2.pdf

まずもっとも簡単な場合

作用 S が場 ϕ^i のある種の変換 $\phi^i \to \phi^i + \delta\phi^i$（ただし、$\delta\phi^i = R^i_\alpha(\phi)\,\epsilon^\alpha$）に対して不変であるとする。

$$S = \int d^4x\, L(\phi^i, \partial_\mu\phi^i)$$

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial\phi^i}\delta\phi^i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\delta\partial_\mu\phi^i \right)$$

$$= \int d^4x \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial\phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} \right)\delta\phi^i + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\,\delta\phi^i \right) \right\} = 0$$

ここで、場の運動方程式 $\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} - \frac{\partial L}{\partial\phi^i} = 0$ を使うと、　「量子力学 / 場の量子論 / 場の正準方程式 / ラグランジュの方程式」参照

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^i)}\,\delta\phi^i \right) = 0$$

つまり

$$j^\mu{}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi^i)} R^i{}_\alpha$$

ただし、この保存 Current j^μ のことを Noether current と呼ぶ。

導出 2　　http://hep1.c.u-tokyo.ac.jp/~kazama/QFT/qft4slide.pdf　&　「量子力学 / 場の量子論 /Noether の定理」参照

Lagrange 微分：$\frac{\delta L}{\delta\phi}$ を次のように定義する。

$$\frac{\delta L}{\delta\phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}$$　「量子力学 / 場の量子論 / 場の正準方程式」参照

場の運動方程式：$\frac{\delta L}{\delta\phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$

次の無限小変換を考える。

$$x \to x' = x + \Delta x \quad (x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + \Delta x^\mu)$$

$\phi(x) \to \phi'(x') = \phi(x) + \Delta\phi(x)$　　Δ は total change（$\phi(x)$ からの差分）を表す。

また、$\phi'(x')$ は、$\phi'(x') = \phi'(x) + \Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$ でもある。

$\phi'(x)$ は場を少しだけ変形したもの、次の項は位置を少しだけずらしたときの差分。つまり、場の形の微小変化による差分＋位置の微小ずらしによる差分＝ total change となる。

Lie 変分：同一座標点での場の形の変化を Lie 変分と呼び $\bar{\delta}$ で表す。

$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$　　（x' 地点では、$\bar{\delta}\phi(x') = \phi'(x') - \phi(x')$ ）

上の $\phi'(x')$ に関する２つの式より、

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \Delta\phi(x) - \Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$$

すなわち total change $\Delta\phi(x)$ は、$\Delta\phi(x) = \bar{\delta}\phi(x) + \Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$ となる。

作用 $S = \int d^4x\, L(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$ の変化を求める。

$$S' = \int d^4x'\, L(\phi'(x'), \partial_\mu\phi'(x'))$$

まず場の変化を x' での Lie 変分で書き表す。すなわち $\phi'(x') = \phi(x') + \bar{\delta}\phi(x')$ 等々。

すると、微小量の一次のオーダーまでとって

$$S' = \int d^4x'\, L(\phi(x'), \partial_\mu\phi(x')) + \int d^4x \left(\frac{\partial L}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\bar{\delta}\phi \right)$$

第 1 項を x での表式に書き換えると、

$$\int d^4x'\, L(x') = \int d^4x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| L(x') \qquad d^4x' = d^4x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$$

$$= \int d^4x \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| (L(x) + \Delta x^\mu\,\partial_\mu L)$$

ヤコビアンは次のように計算される。行列 M を $M^{\nu}{}_{\mu} \equiv \partial_\mu \Delta x^\nu$ と定義すると、

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = det|1+M| = expTrln(1+M) \simeq expTrM \simeq 1 + \partial_\mu \Delta x^\mu \qquad (\therefore d^4x' = d^4x\,(1+\partial_\mu \Delta x^\mu))$$

$$S' = \int d^4x\,\{ (1+\partial_\rho \Delta x^\rho)(L + \Delta x^\mu \partial_\mu L) + \frac{\partial L}{\partial \phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \bar{\delta}\phi \}$$

この一次近似は、

$$= \int d^4x\,\{ L + \partial_\mu(\Delta x^\mu L) + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi) \} \quad \leftarrow \quad \frac{\delta L}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

$$= \int d^4x\,\{ L + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \Delta x^\mu L) \}$$

$$S' - S = \int d^4x\,\{ \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \Delta x^\mu L) \} \quad \leftarrow \quad \int d^4x\,L = S$$

$$= \int d^4x\,\{ \partial_\mu j^\mu + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi \}$$

ここで j^μ は、$j^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \Delta x^\mu L$

$$\partial_\mu j^\mu + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi = 0$$

場の運動方程式 $\frac{\delta L}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$ より、

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

場の理論における例　　https://ja.wikipedia.org/wiki/ ネーターの定理 # 時空の並進対称性
http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science015.pdf 「保存量 / 生成子」

時空の並進対称性

座標変換において、無限小の平行移動を考える。

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

($\delta x^\mu = \epsilon^\mu$ である。) これに付随する場の無限小変換は

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi_i'(x') = \phi_i(x)$$

であり、ネーターカレントは

$$T_\nu{}^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\partial_\nu \phi_i - \delta_\nu^\mu L$$

となる。この $T_\nu{}^\mu$ はエネルギー・運動量テンソルである。 保存則は

$$\partial_\mu T_\nu{}^\mu = 0$$

であり、エネルギーと運動量の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$P_\nu = \int d^3x\,T_\nu{}^0$$

はエネルギー並びに運動量であり、時空の併進の生成子

$$[\,P_\mu, \phi_i(x)\,] = i\,\partial_\mu \phi_i(x)$$

となる。

ローレンツ変換

無限小ローレンツ変換

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\nu} - \epsilon^{\nu\mu})x_\nu$$

を考える。これに付随する場の無限小変換は

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi_i'(x') = \phi_i(x) - \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}(S_{\mu\nu})_i^j\,\phi_j(x)$$

を考える。ここで、行列 $S_{\mu\nu}$ は

$$(S_{\mu\nu})_i^{\,j} = \begin{cases} 0 \quad (\,sclar\,) \\ i\,(\,g_{\mu i}\,\delta_\nu^{\,j} - g_{\nu i}\,\delta_\mu^{\,j}\,) \quad (\,vector\,) \\ \dfrac{i}{4}\,(\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu - \gamma_\nu\,\gamma_\mu\,)_i^{\,j} \quad (\,spinor\,) \end{cases}$$

で定義される場のスピンである。γ_μ はガンマ行列である。

このとき、ネーターカレントは

$$M_{\nu\rho}{}^{\mu} = x_\nu\,T_\rho{}^{\mu} - x_\rho\,T_\nu{}^{\mu} - i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\,\phi_i)}\,(S_{\nu\rho})_i^{\,j}\,\phi_j$$

となる。この $M_{\nu\rho}{}^{\mu}$ を角運動量密度という。 $M_{\nu\rho}{}^{\mu}$ は ν, ρ について反対称である。 保存則は

$$\partial_\mu\,M_{\nu\rho}{}^{\mu} = 0$$

であり、角運動量の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$M_{\nu\rho} = \int d^3x\,M_{\nu\rho}{}^{0}$$

は角運動量とブースト演算子となる。

位相変換

複素場を考えて場の位相を変える変換を考える。

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi_i(x) - i\,e\,\epsilon\,\phi_i(x)\;, \quad \bar{\phi}_i(x) \longrightarrow \bar{\phi}_i(x) + i\,e\,\epsilon\,\bar{\phi}_i(x)$$

このとき、ネーターカレントは

$$j^\mu = i\,e\,(\,\bar{\phi}_i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\,\bar{\phi}_i)} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\,\phi_i)}\,\phi_i\,)$$

となる。これは 4 元電流密度である。保存則は

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

であり、電荷の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$Q = \int d^3x\,j^0$$

は電荷である。