相対性理論

はじめに（特殊相対性理論）

すべての慣性座標系は、同等であるという相対性の原理によれば、物理法則はどの座標系においてもおなじ形に書かれなくてはならない。ところが、座標のガリレイ変換のもとで、ニュートンの方程式は相対性の原理をみたしているが、マックスウェルの方程式は相対性の原理をみたさない。ローレンツは、このマクスウェル方程式間の換算方式を算出してローレンツ変換にたどりついた。

ところが、アインシュタインのアプローチはかなり異なる。「光速度が慣性系によらず一定」（当時のマイケルソン - モーレイの実験結果）をそのまま認め、理論の根本的な要請と置いたことである。

アインシュタインが採用したのは、次の２つの原理である。

①相対性原理　すべての慣性系において物理法則は同じ形に表現される。

②光速度不変の原理

①相対性原理と②相互作用の伝播速度の有限性を結びつけたものは、相互作用の伝播速度が無限大であるという前提にたつガリレイの相対性原理と区別して、アインシュタインの相対性原理と呼ばれる。相対性原理からすれば、相互作用の伝播速度もすべての慣性基準系において同一でなければならない。この一定の速度は真空中を光が伝わる速度でもある。

古典力学では、場は、粒子の相互作用という物理現象を記述する一つの様式でしかなかった。相対性理論では、相互作用の伝播速度が有限であることのために事態は根本的に一変する。１個の粒子の位置の変化の影響が他の粒子におよぶのは、ある長さの時間が経過してのちである。このことは、場それ自体が物理的実存性を獲得することを意味している。

「同時性」概念にも大きな変革がもたらされる。ガリレイの相対性原理で「同一場所」という概念が定まった基準系を選択したあとにのみ意味をもつのと同様に、「同時性」という概念もある基準系を選んだのちにおいてのみ意味をもつことになったのである。すなわち、ある基準系では同時であっても別の基準系ではもはや同時ではない。

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$　として

ある基準系で速さが v で動いているものは、基準系からみて

長さ $1/\gamma$ 倍（短く）、時間の進み具合 γ 倍（ゆっくり）、重さ γ 倍（重く）になる。

$l = l_0/\gamma$　　　$\tau = \gamma\tau_0$　　　$m = \gamma m_0$

運動量保存の法則を否定して、かわりに質量が速度に依存しないと考えることもできるが、それは、力学をもっと混乱した記述にしなければならなくなる。

そこで、運動量保存の法則を維持し、質量の速度変化を認める。質量の速度依存性は、ニュートン力学と相対論的力学を区別する本質的な相違である。

基準系を変えると、空間 - 時間グラフの層は互いに混合する。その意味では、相対性理論は空間関係と時間関係のあいだの独立性を除く。だが、相対性理論が空間の４つの変数を発見したというのは正しくない。あくまで、時間と空間は同等ではない。この二つは本質的に物質の存在の異なる形態なのである。事象の時刻は拡張された４番目の座標であるが、けっして第４番目の空間座標ではない。時間と空間を同等なものとするのではなく、４次元空間・時間多様体の特別な「幾何学」を使って、その性質を統一的に研究することがこの相対性理論の基本的傾向である。

準備（反変ベクトル・共変ベクトル、計量）

記述について　http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/CovariantContravariant/

座標系の基底として $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ のように添字が右下につくタイプのものと、$\{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3\}$ のように添字が右上につくタイプのものが両方でてくる。どちらを使っても良いのだが，『ベクトルの成分につく添字は、基底についている添字と上下を逆にする』と約束しておく。

例えば、

$\mathbf{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ または $\mathbf{A} = A_1\boldsymbol{e}^1 + A_2\boldsymbol{e}^2 + A_3\boldsymbol{e}^3$

アインシュタインの縮約記法

添字について上下に同じものがあれば、次元数に応じた和をとるものとする。こう約束しておけば、記述がだいぶん簡単になる。

$a^ib_i = a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3$（4 次元では $a^ib_i = a^0b_0 + a^1b_1 + a^2b_2 + a^3b_3$）

$a^i{}_kb_i = a^1{}_kb_1 + a^2{}_kb_2 + a^3{}_kb_3$（4 次元では $a^i{}_kb_i = a^0{}_kb_0 + a^1{}_kb_1 + a^2{}_kb_2 + a^3{}_kb_3$）等々

座標変換

基底ベクトルの座標変換は、最初の座標の基底ベクトルを $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$、新しい座標の基底ベクトルを $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ として、次のように書ける。

$\boldsymbol{e}'_i = p_i{}^1\boldsymbol{e}_1 + p_i{}^2\boldsymbol{e}_2 + p_i{}^3\boldsymbol{e}_3 = p_i{}^k\boldsymbol{e}_k$　　← 添字が上下で同じものは次元数に応じた和をとることとする（アインシュタインの縮約記法）

$\boldsymbol{e}' = P\boldsymbol{e}$　　特に、ベクトル空間の基底が正規直交系である場合は，P は直交行列となる。$P^t = P^{-1}$

反変ベクトル

反変ベクトルの例として、位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ （他にも速度、運動量、加速度など多数あげられる）

$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3 = x'^1\boldsymbol{e}'_1 + x'^2\boldsymbol{e}'_2 + x'^3\boldsymbol{e}'_3$　が成り立つ。

この右辺に上で書いた $\boldsymbol{e}'_i$ を代入して $\boldsymbol{e}_i$ について整理すると、

$x^i = p_1{}^ix'^1 + p_2{}^ix'^2 + p_3{}^ix'^3 = p_k{}^ix'^k$　を得る。

$\boldsymbol{x} = P^t\boldsymbol{x}'$

$\boldsymbol{x}' = (P^t)^{-1}\boldsymbol{x}$　（反変ベクトル変換）

（基底ベクトルを明示的に表わすと，$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + x^3\boldsymbol{e}_3$ となる。この表記の場合、基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の添字は下付のままでよい。）

共変ベクトル

一方、基底ベクトルの座標変換で、次のように基底ベクトルと同一の変換式に従うベクトル $\boldsymbol{y}$ を共変ベクトルと呼ぶ。

$y'_i = p_i{}^1y_1 + p_i{}^2y_2 + p_i{}^3y_3 = p_i{}^ky_k$

$\boldsymbol{y}' = P\boldsymbol{y}$　（共変ベクトル変換）

共変ベクトルの例としては、スカラー量を座標で偏微分して作られているベクトル。例えば、電場、電場はスカラー量の電位を座標で偏微分したものである。

（基底ベクトルを明示的に書くと、最初に決めた添字を上下に分けるというルールにより、$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}^1 + y_2\boldsymbol{e}^2 + y_3\boldsymbol{e}^3$ となる。この表記の場合、基底ベクトル $\boldsymbol{e}^i$ の添字は上付になる。）

共変ベクトルと反変ベクトルは互いに内積を取ると座標変換ルールが打ち消しあって、座標の取り方によらない量（スカラー）になる。こういう関係を「双対（dual）」という。

$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') = \boldsymbol{x}'^t\boldsymbol{y}' = ((P^t)^{-1}\boldsymbol{x})^tP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^tP^{-1}P\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

正規直交基底では、共変ベクトルと反変ベクトルは同じような変換となる。

$\boldsymbol{x}' = (P^t)^{-1}\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}$　（反変ベクトル変換）

$\boldsymbol{y}' = P\boldsymbol{y}$　（共変ベクトル変換）

次のような定義のほうがわかりやすいかもしれない。(P6 参照)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial y'} \\ \frac{\partial x}{\partial z'} & \frac{\partial y}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{pmatrix}$$

反変ベクトル　$\boldsymbol{a}' = A\boldsymbol{a}$　　$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k$

共変ベクトル　$\boldsymbol{b}' = B\boldsymbol{b}$　　$b'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} b_k$

$A^t = B^{-1}$

反変ベクトルと共変ベクトルの内積を取った量はスカラーになる。

$\boldsymbol{a}'^t \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{b}$

反変ベクトルの例　位置の微小変化を表すベクトル (dx, dy, dz)

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k$$

共変ベクトルの例　微分演算子のベクトル $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial x}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z}$$

ϕ をスカラーとすると、$\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ は共変ベクトルになる。

計量（メトリック）

無限小線素 ds^2（微小距離）が次のように表せる時、g_{ij} を計量と呼ぶ。

$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$

計量は 2 階の共変テンソルの変換則に従う。

ds^2 はスカラー。一方、微小変位 dx^i、dx^j は反変ベクトル。よって g_{ij} は共変テンソルである。

計量の成分は、

$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} g_{kl}$

のような変換を受ける。

計量テンソルは反変ベクトルを共変ベクトルに変換する。

$A_i = g_{ij} A^j$

逆に、g_{ij} の逆行列 g^{ij}（反変テンソル）は、共変ベクトルを反変ベクトルに変換する。

$g^{ij} A_i = A^j$

ミンコフスキー計量 $\mathcal{G}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

ローレンツ変換

ローレンツ変換は、ローレンツ式の「マクスウェル方程式を不変に保つ」変換方法から考えるよりも、「光速度が慣性系によらず一定」であるという要請から導くほうがよほど簡単である。

静止系 (x, y, z, t) とそれに対して x 軸方向へ速度 v で運動している系 (x', y', z', t') を考える。
同じ物差し l_0 を x 軸上に用意し、互いにどのように見えているか考えてみる。見え方は同等＝相対性がなりたつ。
その変化を

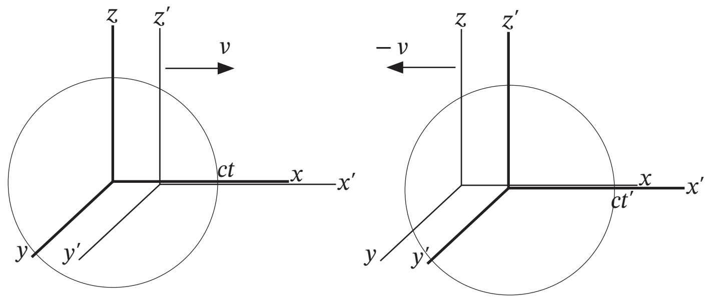
$l = \gamma\, l_0$ とする。（物差しが倍の長さになれば、見え方も比例して倍になるはず。）

さて、原点から放出された光は、不変速度 c で、x 軸方向に関していえば、

$x = ct$ 　　左図

$x' = ct'$ 　　右図

のように広がっていく。



一方、光の到達している地点は、

$x' = \gamma(x - vt)$ 　　左図

$x = \gamma(x' + vt')$ 　　右図

の関係が成り立つ。

したがって、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = v/c$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

座標系によって時間が異なること、時間と空間が混じり合うことなどがわかる。
$c \to \infty$ とすると、ガリレイ変換となる。
動いている物差しは短く（$1/\gamma$ 倍）、時計はゆっくり（γ 倍）、重さは重くなって（γ 倍）見える。（質量の変化に関しては、P8「相対論的力学」参照）

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ミンコフスキー（Minkowski）時空

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

慣性座標系間の変換（$\mathscr{S}$ から $\mathscr{S}'$ へ）として

ローレンツ変換　$L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ →（原点は一致している）

L の要素　　純粋なローレンツ変換　L_α　エルミート行列　（$\mathscr{S}$ に対して $\boldsymbol{\alpha}$ 方向へ一定速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている $\mathscr{S}'$）

空間の回転 R　ユニタリ行列

時間と空間のそれぞれの反転　$\pm\mathscr{G}$ 　　$\mathscr{G} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

ローレンツ変換では、

$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$ が成り立つ。　←光速は変わらない

$\boldsymbol{x}^t \mathcal{G}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'^{\,t} \mathcal{G}\, \boldsymbol{x}'$　　　$\mathcal{G}$ は計量テンソル　　　$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$= (L\boldsymbol{x})^t \mathcal{G}\, (L\boldsymbol{x})$

$= \boldsymbol{x}^t L^t \mathcal{G}\, L\boldsymbol{x}$

$\mathcal{G} = L^t \mathcal{G}\, L \quad \rightarrow \quad |L| = \pm 1$

ローレンツ群

$\mathcal{G} = L^\dagger \mathcal{G}\, L$ を満足する L の集合 $\mathcal{L}$ をローレンツ群という。$L^\dagger$ は L の随伴行列 (L の転置およびその成分の複素共軛 L^*)

一般に $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$

同一方向の純粋なローレンツ変換は、群 $\mathcal{L}_\alpha$（$\mathcal{L}$ の部分群）をつくるが、$\mathcal{L}_\alpha$ は可換群である。

反変ベクトル $\boldsymbol{a}$（添字は上 a^i）　$\mathcal{S}$ で $\boldsymbol{a}$、$\mathcal{S}'$ で $\boldsymbol{a}'$ のとき、$\boldsymbol{a}' = L\boldsymbol{a}$ がなりたつ。

共変ベクトル $\boldsymbol{b}$（添字は下 b_i）　$\mathcal{S}$ で $\boldsymbol{b}$、$\mathcal{S}'$ で $\boldsymbol{b}'$ のとき、$\boldsymbol{b}' = \widetilde{L}\, \boldsymbol{b}$ がなりたつ。ただし、$\widetilde{L} = \mathcal{G}\, L\, \mathcal{G}^{-1}$

$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{-1}$

$\widetilde{L} = (L^\dagger)^{-1}$　　純粋なローレンツ変換の場合は $\widetilde{L} = L^{-1}$

反変テンソル T（T^{ij}）　$\mathcal{S}$ で T、$\mathcal{S}'$ で T′ のとき、$\mathrm{T}' = L\, \mathrm{T}\, L^\dagger$ がなりたつ。

共変テンソル U（U_{ij}）　$\mathcal{S}$ で U、$\mathcal{S}'$ で U′ のとき、$\mathrm{U}' = \widetilde{L}\, \mathrm{U}\, \widetilde{L}^\dagger$ がなりたつ。

混合テンソル V（$V^i{}_j$ あるいは $V_i{}^j$）　$\mathcal{S}$ で V、$\mathcal{S}'$ で V′ のとき、$\mathrm{V}' = L\, \mathrm{V}\, \widetilde{L}^\dagger$ あるいは $\mathrm{V}' = \widetilde{L}\, \mathrm{V}\, L^\dagger$ がなりたつ。

これらのテンソルは、反変ベクトルや共変ベクトルを組み合わせてつくることができる。

$T^{ij} = A^i B^j$

$U_{ij} = A_i B_j$

$V^i{}_j = A^i B_j$

共変ベクトルと反変ベクトルは互いに内積を取ると、座標の取り方によらない量（スカラー）になる。

$\boldsymbol{a}'^\dagger \boldsymbol{b}' = (L\boldsymbol{a})^\dagger \mathcal{G}\, L\, \mathcal{G}^{-1} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\dagger L^\dagger \mathcal{G}\, L\, \mathcal{G}^{-1} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\dagger \mathcal{G}\, \mathcal{G}^{-1} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{b}$

スカラー量を偏微分して作られるベクトルは、共変ベクトルとなる。

$\boldsymbol{x}' = L\boldsymbol{x} \quad \rightarrow \quad d\boldsymbol{x}' = L d\boldsymbol{x}$　より　$L = \begin{pmatrix} \partial x'^0/\partial x^0 & \partial x'^0/\partial x^1 & \partial x'^0/\partial x^2 & \partial x'^0/\partial x^3 \\ \partial x'^1/\partial x^0 & \partial x'^1/\partial x^1 & \partial x'^1/\partial x^2 & \partial x'^1/\partial x^3 \\ \partial x'^2/\partial x^0 & \partial x'^2/\partial x^1 & \partial x'^2/\partial x^2 & \partial x'^2/\partial x^3 \\ \partial x'^3/\partial x^0 & \partial x'^3/\partial x^1 & \partial x'^3/\partial x^2 & \partial x'^3/\partial x^3 \end{pmatrix}$

$$\widetilde{L} = (L^\dagger)^{-1} = \begin{pmatrix} \partial x^0/\partial x'^0 & \partial x^1/\partial x'^0 & \partial x^2/\partial x'^0 & \partial x^3/\partial x'^0 \\ \partial x^0/\partial x'^1 & \partial x^1/\partial x'^1 & \partial x^2/\partial x'^1 & \partial x^3/\partial x'^1 \\ \partial x^0/\partial x'^2 & \partial x^1/\partial x'^2 & \partial x^2/\partial x'^2 & \partial x^3/\partial x'^2 \\ \partial x^0/\partial x'^3 & \partial x^1/\partial x'^3 & \partial x^2/\partial x'^3 & \partial x^3/\partial x'^3 \end{pmatrix}$$

↑計算　$\mathcal{G} = L^\dagger \mathcal{G}\, L$ より $(L^\dagger)^{-1} \mathcal{G} = \mathcal{G}\, L$　$\widetilde{L} = \mathcal{G}\, L\, \mathcal{G}^{-1} = (L^\dagger)^{-1} \mathcal{G}\, \mathcal{G}^{-1} = (L^\dagger)^{-1}$

反変ベクトル　$A'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k$

共変ベクトル　$A'_i = \dfrac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k$

参考

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$　　$A^{\dagger}$ は行列 A の随伴行列 (A の転置およびその成分の複素共軛　A^{t^*})
エルミート行列　$H^{\dagger} = H$
ユニタリ行列　$U^{-1} = U^{\dagger}$

行列式の公式をついでに列挙

$|AB| = |A||B|$

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$|A^{t}| = |A|$

$|\bar{A}| = \overline{|A|}$

$|A^{\dagger}| = |A|^{*}$

直交行列　A

$A^{t}A = I$

$|A| = \pm 1$

ユニタリ行列　U

$|U| = 1$

正方行列 A が可逆である（逆行列が存在する）ことの必要十分条件は、$|A| \neq 0$ である。

相対論的力学

固有時

固有時とは、注目する物体に伴って移動する座標系で計測した時間のことである。一般に記号は τ を用いる。

$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$（c: 光速、t: 観測者にとっての時間、(x, y, z): 観測者にとっての物体の空間座標）はローレンツ変換に関して不変な量である（つまりいかなる座標系で物体を観測してもこの値は同じになる)。

そこで、$d(c\tau)^2 = d(ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ として $\tau = \int d\tau$ と τ を定義すると、この τ も不変量となる。この τ が固有時である。

恒等的に $(x, y, z) = 0$ である時、当然 $\tau = t$ である。常に $(x, y, z) = 0$ が成立するということは、それは観測対象の物体と共に移動する座標系で対象を観測していることに他ならない。これが τ が固有時と呼ばれる所以である。つまり、固有時とは物体固有の時間という意味である。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

不変量

$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

$(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cd\tau)^2$

両辺を $(d\tau)^2$ で割ると、

$$(c\frac{dt}{d\tau})^2 - (\frac{dx}{d\tau})^2 - (\frac{dy}{d\tau})^2 - (\frac{dz}{d\tau})^2 = c^2 \qquad ※$$

$(dt)^2$ で割ると、

$$c^2 - (\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt})^2 - (\frac{dz}{dt})^2 = (c\frac{d\tau}{dt})^2$$

つまり、$1 - (\frac{v}{c})^2 = (\frac{d\tau}{dt})^2$　　dt たっても $d\tau$ しか進まない

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$　とすると（ローレンツ係数)、

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

４元速度

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} cdt/d\tau \\ dx/d\tau \\ dy/d\tau \\ dz/d\tau \end{pmatrix} \qquad \frac{dx}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{dx}{dt} = \gamma\frac{dx}{dt} \quad \text{なので} \quad \boldsymbol{u} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_x \\ v_x \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}^t \mathcal{G}\, \boldsymbol{u} = (c\frac{dt}{d\tau})^2 - (\frac{dx}{d\tau})^2 - (\frac{dy}{d\tau})^2 - (\frac{dz}{d\tau})^2 = c^2 \qquad ※\text{より}$$

４元運動量

$\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{u}$　　　m_0 は静止質量

$m = \gamma\, m_0$ と置くと、$\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{u} = m\begin{pmatrix} c \\ {}^{(3)}\boldsymbol{v} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^t \mathcal{G}\, \boldsymbol{p} &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= m_0{}^2 \boldsymbol{u}^t \mathcal{G}\, \boldsymbol{u} = (m_0 c)^2 \qquad \text{不変} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau}$$

$E = mc^2$　について

4 元運動量の時間成分 p^0 に c を掛けたものをテイラー展開すると、

$$cp^0 = m_0c^2\frac{dt}{d\tau} = \frac{m_0c^2}{d\tau/dt} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

第二項はニュートン力学における運動エネルギーであるので cp^0 はエネルギーに相当していると考えられる。
従って第一項の m_0c^2 もエネルギーを表していると解釈できる。この値は質点が例え慣性系に対して静止していて $v = 0$ であっても持つエネルギーであることから、この値を質点の静止質量エネルギーと呼ぶ。

$$cp^0 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2 = E \quad （全エネルギー）$$

質量欠損や核反応・対消滅から、質量を持つ物質は mc^2 のエネルギーを持つことが確かめられている。

エネルギーと質量の等価法則ともいえる。
質量がエネルギーに、またその逆に変わるというのは、正確な表現ではない。

マクスウェルの方程式

$\boldsymbol{E}$ は電場、$\boldsymbol{H}$ は磁場、$\boldsymbol{D}$ は電束密度、$\boldsymbol{B}$ は磁束密度、$\boldsymbol{i}$ は電流密度、ρ は電荷密度、t は時間

$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ (1)

$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \partial\boldsymbol{D}/\partial t$ (2)

$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$ (3)

$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ (4)

(1) 式は電磁誘導の法則、(2) 式は電流のつくる磁場に関するアンペールの法則を変位電流 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ を加えて一般化したもの。この 2 つの式で電場と磁場が関係づけられ、これにクーロンの法則に由来する (3)、(4) 式が補足されている。(3)、(4) 式はもともと定常状態で導かれたものであるが、非定常状態においても成り立つと考えられた。等方性の媒質中では、誘電率を ε、透磁率を μ とすれば、$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ である。(2) 式で変位電流 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ をつけ加えたのは電荷の保存についての連続の式 $\nabla\cdot\boldsymbol{i} = -\partial\rho/\partial t$ を考慮したからである。変位電流を導入したことによりマクスウェルはこの基礎方程式から電磁波の存在を理論的に予言したが，これは数年後 H.R. ヘルツにより実験的に証明された。

$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = div\,\boldsymbol{D} = \partial D_x/\partial x + \partial D_y/\partial y + \partial D_z/\partial z$

$\nabla\times\boldsymbol{E} = rot\,\boldsymbol{E}$ $(rot\,\boldsymbol{E})_x = \partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z$ $(rot\,\boldsymbol{E})_y = \partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x$ $(rot\,\boldsymbol{E})_z = \partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y$

$\nabla\phi = grad\,\phi = (\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ ϕ はスカラー

$\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2$

電磁波

電荷も電流もない空間を考えるから、

$\rho = 0$、$\boldsymbol{i} = 0$ である。さらに、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ という関係がある。

したがって、マックスウェルの方程式は、次のような $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ のみに関する式になる。

$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu_0\,\partial\boldsymbol{H}/\partial t$

$\nabla\times\boldsymbol{H} = \varepsilon_0\,\partial\boldsymbol{E}/\partial t$

$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$

$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$

電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と ϕ の導入

$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ という関係を想定すると、マクスウェルの方程式の一つである (4) の $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ は自動的に満たされることになる。$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{X}$ という形の式は必ず 0 になるからである。

またこれを (1) 式に代入すると、$\nabla\times(\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{A}/\partial t) = 0$ となる。カッコのなかは回転をとってゼロとなるので、ベクトル解析よりスカラー場 ϕ の勾配としてあらわすことができる。

したがって、$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ と表すことで (1) も満たされることになる。($-\nabla\phi$ のマイナスは静的な場合 ϕ が電位と一致するようにしたもの。)

電場の強度と磁束密度からスカラーポテンシャル ϕ、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入したが、ϕ、$\boldsymbol{A}$ ありきで始めると、上の式 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ は電場の強度と磁束密度の「定義式」とみなす事もできる。

電磁場は電磁ポテンシャルの一階の微分方程式で定義される為、電磁ポテンシャルには不定性が生じる。この不定性によりポテンシャルを変化させる操作はゲージ変換と呼ばれる。

電磁場をラグランジュ形式で記述する時、ラグランジアンは電磁場ではなく電磁ポテンシャルを用いてかかれるため、電磁ポテンシャルはより基本的な概念として扱われる。

古典電磁気学では、観測にかかる本質的な物理量は電場や磁場であって、ベクトルポテンシャルやスカラーポテンシャルは便宜的に導入された道具に過ぎないとも考えられた。またゲージ変換も理論の不定性を増すだけの余分な性質のようにも思われている。しかし量子力学などの立場からは、電場や磁場よりも電磁ポテンシャルの方が本質的な物理量である。その最も著しい表れ方がアハラノフ＝ボーム効果である。またゲージ変換は、荷電粒子と電磁場との相互作用の形を一意的に決定しているために便利である。

マクスウェル自身の原著論文『電磁場の動力学的理論』や原著教科書『電気磁気論』はここでの議論と同じくスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルから始めて、電磁場を定義している。だが、後にヘルツによって電磁ポテンシャルが消去され、(1)、(4) を電磁場の拘束条件とするようになった。

マクスウェルの方程式のうち、電荷によって生じる電磁場の式 (2)、(3) は、真空中では、

$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0 \boldsymbol{i}$　　　光速　$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

この式に電磁場の定義式 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \partial \boldsymbol{A}/\partial t$ を代入すると、

$$\nabla^2 \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A}\right) + \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{i}$$

が得られる。したがって電磁ポテンシャルを基本的な量として電磁気的現象を記述する場合にはこの式が場の運動を決定する方程式となる。

ミンコフスキー（Minkowski）時空

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} c\rho \\ i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix}$$

すると、電荷の保存についての連続の式 $\nabla \cdot {}^{(3)}\boldsymbol{i} = -\partial\rho/\partial t$ は、

$\boldsymbol{\square} \cdot \boldsymbol{i} = 0$ となる。

４元ポテンシャル

$$A^i = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

$$A_i = \mathcal{G}_{ij} A^j = \begin{pmatrix} \phi/c \\ -\boldsymbol{A} \end{pmatrix}$$

電磁場テンソル F_{ij}

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{ij} = \mathcal{G}^{ik}\mathcal{G}^{jl} F_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

すると、電磁場の定義式は、

$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$　となる。　（ $\partial_i = \partial/\partial x^i$ ）

電磁場の拘束条件は、

$\partial_k F_{ij} + \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} = 0$（自明　Bianch 恒等式）

電磁場の運動方程式は、

$\partial_j F^{ji} = \mu_0 i^i$　　（ $\partial_j \partial^j A^i - \partial^i(\partial_j A^j) = \mu_0 i^i$ あるいは $\square A^i - \partial^i \partial_j A^j = \mu_0 i^i$ ）

である。　　　　$\square = \boldsymbol{\square} \cdot \mathcal{G}^{ij} \boldsymbol{\square} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

ゲージ変換

前述のように電磁ポテンシャル A^i の選び方は一意ではない。しかし、条件（ゲージ固定条件）を課す事で一意に定める事ができる。
スカラーポテンシャルは常にゲージ変換によって $\phi = 0$ とすることが可能である。しかしベクトルポテンシャルは一般には $\boldsymbol{A} = 0$ とすることは不可能である。

ローレンツゲージ
$\partial_j A^j = 0$
この条件式を満たす電磁ポテンシャルを用いてマクスウェルの方程式を書き換えると、
$\partial_j \partial^j A^i = \Box A^i = \mu_0 i^i$

クーロンゲージ
$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$

放射ゲージ
電荷密度、電流密度がともに 0 の場合、
$\phi = 0$
$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$
を同時に満たすゲージを選ぶことが可能である。 このゲージはローレンツゲージであり、かつ、クーロンゲージである。このとき、電磁ポテンシャルの満たすべき方程式は、
$\Box \boldsymbol{A} = 0$　　波動方程式

ラグランジュ形式 （P13、P14 参照）
電磁場をラグランジュ形式により記述するとき、電磁場が物質と相互作用する系の作用積分は、
$S = S_{(m)} + S_{(f)} + S_{(mf)}$ と書かれる。
$S_{(m)}$ は物質の項、$S_{(f)}$ は電磁場の項、$S_{(mf)}$ は物質と電磁場の相互作用項である。

電磁場の項は、$S_{(f)} = -\frac{1}{4\mu_0}\int F^{ij}F_{ij}\,d^4x$
相互作用項は、$S_{(mf)} = \int i^i A_i\,d^4x$
ラグランジアン　$L = -\frac{1}{4\mu_0} F^{ij}F_{ij} + i^i A_i$

最小作用の原理 $\delta S = 0$ より、運動方程式 $\Box A^i = \mu_0 i^i$ が導ける。

電磁場のエネルギー・テンソル
$T_{ij} = -\frac{1}{4\pi}\left(\mathcal{G}^{kl}F_{ik}F_{jl} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{ij}F^{kl}F_{kl}\right)$

ラグランジアン

ラグランジアン（Lagrangian）は、ラグランジュ関数とも呼ばれ、運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー V の差を一般化座標 $\{q_k\}$ とその時間微分 $\{\dot{q}_k\}$ で表した関数。
$L(q,\dot{q},t)=T$（運動エネルギー）$-V$（ポテンシャルエネルギー）
ラグランジアンはエネルギーの次元を持つスカラーであるが、観測可能な物理量ではなく、その値自体に物理的な意味があるわけではない。また、座標と時間の任意関数 $f(q,t)$ の時間による微分を加えた
$L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)$ の形でも全く同じ力学系を表す。

運動方程式

例えば、時刻 t_0 に位置 x_0 にあった粒子が、t_1 に位置 x_1 に移動した場合を考えてみる。このとき、位置 x_0 と x_1 の間を結ぶ運動は、力学的エネルギー保存則が成立する保存系では、ラグランジアン L の時間積分 S（作用積分）を用いて次のようにあらわすことができる。

$$\delta S=\delta\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)\,dt=0$$

位置 x_0 と x_1 の間を通るさまざまな経路のうち、作用積分 S の変分がゼロ、すなわちラグランジアン L の変動が最小（極値）となるような経路に沿った運動のみが実現されることを意味し、このような原理を最小作用の原理と呼ぶ。

作用の停留条件 $\delta S=0$ から、ラグランジュの運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$$

が得られる。 これはニュートンの運動方程式と同等である。
//
少しずれた道筋 − 最も経済的な道筋 $= L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q})-L(q,\dot{q})=\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}$

$\delta S=\int\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0$　　ここで部分積分　$\int fg'=fg-\int f'g$ を使うと

$\quad=\int\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right)dt+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q$　　途中をずらしても、スタートとゴール地点は変えていないので　$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q=0$

$\quad=\int\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right)dt=0$

つまり、$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0$

運動量

一般化運動量はラグランジアンの一般化速度による微分
$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ によって定義される。これは並進対称性から導かれる保存量である。
一般化運動量を用いると、ラグランジュの運動方程式は
$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$ となる。ニュートンの運動方程式との比較から、右辺は一般化された力と見ることも出来る。

最小作用の原理を理解するには、古典的な粒子のイメージではなく、量子力学的な波動のイメージで考えるとよい。量子力学的には、粒子の本質は波動であり、ある地点（始点 O）から別の地点（終点 P）まで粒子が移動するとき、その移動経路は 1 つではなく、実際には、始点 O から終点 P までの『無数の経路』を量子力学的な波動が伝播しているものと考える。ただし、それぞれの経路を通る波は同じように振動せず、その波の振動は、作用積分 S に依存することが知られている。量子力学的には、始点 O から終点 P までの遷移振幅は、作用積分 S を用いて、始点 O から終点 P に至るあらゆる経路を通る波の寄与の和として書くことができる。
ここで、作用積分 S が最小の経路を通る波の変動は緩やかなため、近くの経路を通る波と強め合うが、作用積分 S が大きな経路を通る波の変動は激しいため、近くの経路を通る波と山と谷が打ち消し合って弱め合う。その結果、作用積分 S が大きな経路を通る波の寄与は打ち消し合って消滅してしまい、作用積分 S が最小となる経路を通る波の寄与だけが強め合って最終的に残る。この残った経路が、ちょうど古典的な粒子の運動方程式の経路と一致することになる。これは、停留値法の考え方と似ている。このように、ラグランジアンは、波の振動の振る舞いを決定する基本的な量であり、粒子が波動であると考えることによって、その本質を理解することができる。
http://dreistein.hatenablog.com/entry/2015/01/15/080000

場のエネルギー・運動量テンソル

一般的な形で論議する。

$$S=\int \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) dVdt=\int \frac{1}{c}\Lambda\, d\Omega$$

Λ は、系を記述する量 q と $\frac{\partial q}{\partial x^i}$ の関数である。（電磁場では、q は A_i であるが、ここでは簡単のため 1 個の q だけである。系が閉じているという数学的表現は、Λ があからさまに x^i に依存しないことである。）

$\int \Lambda\, dV$ は系のラグランジアンであり、したがって、Λ は系のラグランジアン密度とみなすことができる。

運動方程式

運動方程式は最小作用の原理にしたがって、S を変分することによって求められる。

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta\frac{\partial q}{\partial x^i}\right)d\Omega \qquad q_{,i}=\frac{\partial q}{\partial x^i}$$

$$=\frac{1}{c}\int\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right)-\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right]d\Omega$$

↑表面積分で消える（表面では $\delta q=0$）

$$=\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}-\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right)\delta q\, d\Omega=0$$

δq は任意だから、すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}-\frac{\partial \Lambda}{\partial q}=0 \qquad \text{運動方程式}$$

エネルギー・運動量テンソル

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i}=\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i}+\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\frac{\partial q_{,j}}{\partial x^i}$$ だから、上式を代入して、

$$=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\right)\frac{\partial q}{\partial x^i}+\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\frac{\partial^2 q}{\partial x^i\partial x^j}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}\frac{\partial q}{\partial x^i}\right)$$

$T_i^j=\frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}-\delta_i^j\Lambda$ とすると、 $\frac{\partial T_i^j}{\partial x^j}=0$

いくつかの q があるときは、$T_i^j=\sum\frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,j}}-\delta_i^j\Lambda$

$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}=0$ 　　これは、保存則をあらわす。 $\frac{1}{c}T^{i0}$ が密度、$T^{i\mu}$ が流れ（μ は 1 〜 3）

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int T^{i0}dV=-\int\frac{\partial T^{i\mu}}{\partial x^\mu}dV=-\oint T^{i\mu}dS_\mu \qquad (\mu \text{ は } 1\sim 3、x^0=ct)$$

$p^i=const\int T^{i0}dV$ 　が保存される。（すぐ後に $const=\frac{1}{c}$ が示される。）

このベクトルは、系の 4 元運動量ベクトルと同一のものとみなさなければならない。

すると、$p^0=\xi/c$（エネルギーを c で割ったもの）だから、

$p^0=const\int T^{00}dV=\xi/c$

一方、$T^{00}=\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot q}-\Lambda \quad \left(\dot q=\frac{\partial q}{\partial t}\right)$ 　だから、

エネルギーとラグランジアンとを関係づける通常の式とくらべると、T^{00} はエネルギー密度とみなさなければならない。

したがって、$\int T^{00}dV$ は系の全エネルギーである。

すなわち、$const=\frac{1}{c}$

$p^i=\frac{1}{c}\int T^{i0}dV$

テンソル T^{ij} は、系のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれる。

T^{ij} は、一義的ではない

$T^{ij} + \dfrac{\partial \varphi^{ijk}}{\partial x^i}$ 　（$\varphi^{ijk} = -\varphi^{ikj}$ 　j,k について反対称）もまた、$\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0$ を満足する。

$$p^i = \frac{1}{c}\int \left(T^{i0} + \frac{\partial \varphi^{i0k}}{\partial x^k} \right) dV = \frac{1}{c}\int \left(T^{i0} + \frac{\partial \varphi^{i0\mu}}{\partial x^\mu} \right) dV \quad (\varphi^{i00} = 0 \text{ だから})$$

$$= \frac{1}{c}\int T^{i0}\, dV + \frac{1}{c}\oint \varphi^{i0\mu} dS_\mu$$

↑無限遠で場は０だからこの項は消える

すなわち、運動量には、かわりはない。

T^{ij} を一義的にするためには、系の角運動量のテンソルを p^i によって表すことができるという要請を使う。

$$M^{ij} = \int (x^i dp^j - x^j dp^i)\, dV = \frac{1}{c}\int (x^i T^{j0} - x^j T^{i0})\, dV$$

したがって、角運動量の保存則は、

$\dfrac{\partial (x^i T^{jk} - x^j T^{ik})}{\partial x^k} = 0$ となる。

$\dfrac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_k{}^i$ 、$\dfrac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0$ 　より

$T^{ji} - T^{ij} = 0$

すなわち、対称になるように φ^{ijk} を調整して、T^{ij} をきめればよいのである。

//

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{i0} dV$$

T^{00} 　エネルギー密度

$\dfrac{1}{c}\, T^{\mu 0}$ 　運動量密度

$$\frac{\partial}{c\partial t}\int T^{i0} dV = -\oint T^{i\mu} dS_\mu$$

すなわち、

① $cT^{0\mu}$ は、エネルギーの流量密度 $\boldsymbol{S}$（単位時間に単位面積を通してはこばれるエネルギー量）である。

これから、エネルギー流と運動量密度のあいだの重要な関係が自動的に導かれる。

すなわち、$\boldsymbol{S} = c^2 *$（運動量密度）

② $T^{\mu\nu}$ は、応力テンソルとよばれる運動量の流れの密度の３次元テンソルである。

これを、$\sigma_{\alpha\beta}$ であらわす。

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$