保存量 / 生成子

ネーターの定理によると、系の連続的な対称性に伴って、それに対応するある保存則が存在する。そしてこの保存量としてのチャージは、対象とする物理系の連続対称性の生成作用素とも言われる（$\{\phi, \epsilon G\} = \bar{\delta}\phi$ のように G は ϕ の微小変化を生成している)。このあたりの事情を少しだけ俯瞰してみたい。

解析力学より

詳細は http://www.yam-web.net/science-note/AM.pdf 参照

ϵ を微小パラメータとして、恒等変換と少しだけ違う正準変換を構成するために、

母関数 $C(q, \mathrm{P}, t) = q\,\mathrm{P} + \epsilon\, G(q, \mathrm{P})$　　　$q\,\mathrm{P}$ は恒等変換部分

を考えたとき、このような G を無限小変換の生成子 というのであった。

このとき、

$$\mathrm{P} = p - \epsilon\frac{\partial G}{\partial q}\ ,\ \mathrm{Q} = q + \epsilon\frac{\partial G}{\partial \mathrm{P}} \approx q + \epsilon\frac{\partial G}{\partial p}$$

無限小変換の例

【空間並進】

空間並進 $x \to X = x + \epsilon$ を生成する母関数は

$$C = x\,\mathrm{P} + \epsilon\,\mathrm{P} \approx x\,\mathrm{P} + \epsilon\, p$$

である。

すなわち、空間並進の生成子は運動量である。

【空間回転】

空間回転 $x_1 \to X_1 = x_1 - \epsilon\, x_2\,,\ x_2 \to X_2 = x_2 + \epsilon\, x_1$ を生成する母関数は

$$C = x_1\,\mathrm{P}_1 + x_2\,\mathrm{P}_2 + \epsilon\,(x_1\,\mathrm{P}_2 - x_2\,\mathrm{P}_1) \approx x_1\,\mathrm{P}_1 + x_2\,\mathrm{P}_2 + \epsilon\,(x_1\,p_2 - x_2\,p_1)$$

である。

$x_1\,p_2 - x_2\,p_1 = L_3$ なので、空間回転の生成子は角運動量である。

【時間並進】

時間並進 $t \to T = t + \epsilon$ を生成する母関数は

$$x(t+\epsilon) - x(t) = \epsilon\,\dot{x} = \epsilon\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$p(t+\epsilon) - p(t) = \epsilon\,\dot{p} = -\,\epsilon\frac{\partial H}{\partial x}$$

より、時間並進の生成子はハミルトニアンである。

無限小変換 G に伴う正準変換によって、A はどのように変わるか。

$A(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = A(q, p) + \epsilon\,\{A, G\}$

つまり、$\epsilon\,\{A\,, G\} = \delta A$

これより、このポアソン括弧は、生成子 G の変換による、関数の発展の仕方を与えている。

生成子 G が与える無限小変換がハミルトニアンを不変にするならば、G は保存する。

無限小変換 G で、$H(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = H(q, p)$ ならば $\longrightarrow$ $dG/dt = 0$

これをネーターの定理という。

例

先の「正準変換」で見たように、空間並進の微小変換の生成子は運動量 $G = p$ であった。このとき、もし空間が一様的（どの座標に移ってもハミルトニアンが変わらない）ならば、運動量 $G = p$ は保存する。つまり運動量とは、空間の一様性からくる保存量で、しかも空間並進の生成子だったのである。

同様に、空間回転の生成子は角運動量 $G = x_1\,p_2 - x_2\,p_1$（x_3 軸の回転の場合）であり、ハミルトニアンが不変ならば空間の回転対称性（等方性) からくる保存量となる。

また、時間並進（時間を進める変換）の生成子はハミルトニアン H であり、時間を陽に含まないならば、時間の一様性、時間並進対称性の保存量となる。H を時間発展演算子と呼ぶこともある。

解析力学におけるネーターの定理

①ラグランジュ力学によるネーターの定理

$\delta t = \epsilon_r T_r$,　$\delta q^i = \epsilon_r Q_r^i$

このとき、$X_r = (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i) T_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} Q_r^i$ は、保存量 $\frac{dX_r}{dt} = 0$ となり、

この保存量はポアソン括弧により微小変換（微小変換の生成子 $G = X_r$）

$\{ t , X_r \} = T_r$,　$\{ q^i , X_r \} = Q_r^i$

を定める。

②ハミルトン力学によるネーターの定理

「ハミルトニアンがある微少変換 δ について不変であれば δ の生成子 G_δ は時間不変である。」

ここで δ の生成子 G_δ とは、δ によるベクトル (q^i , p^i) の増分 $\delta(q^i , p^i)$ が

$\delta(q^i , p^i) = (\frac{\partial G_\delta}{\partial p^i} , - \frac{\partial G_\delta}{\partial q^i})$　　ここでの G_δ は ϵG と考えればよい。

と表すことのできる量である。

この定義から、ある観測量 $A(q^i , p^i)$ の δ による変化 $\delta A(q^i , p^i)$ は、次のように表される。

$\delta A(q^i , p^i) = \{ A , G_\delta \}$

ハミルトニアンが微少変換 δ について不変ならば、$\delta H(q^i , p^i) = \{ H , G_\delta \} = 0$ が成り立つ。

$\{ H , G_\delta \} = - \{ G_\delta , H \} = - dG_\delta/dt = 0$　　←　$\dot{A} = \{A, H\}$

よって G_δ は時間不変である。

場の理論におけるネーターの定理

$\Delta x^\mu = \epsilon^i X^{i\mu}(x)$　　$\bar{\delta}\phi_A(x) = \epsilon^i \Gamma^i \phi_A(x)$

ネーターカレントは、$j^{i\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \Gamma^i \phi_A + L X^{i\mu}$ となり、$\partial_\mu j^{i\mu} = 0$ を満たす（保存カレント）。

ネーターカレントの時間成分を空間積分した $Q^i \equiv \int d^3x j^{i0}$ はネーターチャージと呼ばれる。

ネーターチャージ（空間中に蓄えられた物理的な量）は閉空間では時間的に一定になる。つまり、このときはネーターチャージ は時間に依存しない定数となり、保存量となる。

Q を G とおくと、上と同様、これは微小変換の生成子 (無限小生成作用素)

$\{ \phi , G \} = \Gamma \phi$　　　$\{ \phi , \epsilon G \} = \epsilon \Gamma \phi = \bar{\delta}\phi$

となる。

演算子の表現では、$[\phi , G] = i \Gamma \phi$　　　$\{A, B\} \rightarrow - i [A, B]$

九後汰一郎著「ゲージ場の量子論 I 」培風館　P14 ～

オイラー - ラグランジュの運動方程式は、作用積分 $S[\varphi] = \int dx^4 L(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))$ （ L は系のラグランジアン密度) を φ で変分して、停留条件より導かれるものであった。

ネーターの定理は、この運動方程式を利用しながら、作用積分 S が、例えば ϵ をパラメーターとする無限小変換 $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \epsilon G(\varphi(x))$ のもとで不変（ $S[\varphi] = S[\varphi']$ ）とする。

作用積分の不変性は、ラグランジアン密度の変化があってもせいぜい全微分であること、すなわち、

$\delta L = L(\varphi'(x), \partial_\mu\varphi'(x)) - L(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x)) = \epsilon \partial_\mu X^\mu(\varphi(x))$

の形に恒等式として書ける $X^\mu(\varphi(x))$ があることを意味している。

一方、変換 $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \epsilon G(\varphi(x))$ の下での L の変化分は、

$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \epsilon G(\varphi) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \epsilon \partial_\mu G(\varphi)$　　←　ϵ は x によらない大局的変換

$= \epsilon [\partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}) G(\varphi) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu G(\varphi)]$　　←　運動方程式 $\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi)}) = 0$

と評価される。

両式を等値すると、$J^\mu(x) = \dfrac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \varphi(x))} G(\varphi(x)) - X^\mu(\varphi(x))$ なるカレント $J^\mu(x)$ の保存則

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0$$

が従う。このカレントは、Noether カレントと呼ばれる。（また、$G(\varphi)$ や $X^\mu(\varphi)$ は略記であって、φ の微分に依存していてもまったくかまわない。）

Noether カレントから得られる保存電荷

$$Q = \int dx^3\, J^0(x) \qquad dQ/dt = 0$$

は、実は、もとの無限小変換 $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \epsilon\, G(\varphi(x))$ の生成子（generator）になっている。

すなわち、

$\{ \varphi(x), Q \} = G(\varphi(x))$　　古典論

$[\, i\, Q, \varphi(x)\,] = G(\varphi(x))$　　量子論

が成立する。（G が $\dot\varphi = \partial_0\varphi$ によらない場合は即座にわかるが、$\dot\varphi$ による場合でも、かなり一般的に証明できる。）

$$\{ \varphi_i(x), Q \} = \{ \varphi_i(x), \int dy^3\, J^0(y) \}$$

$$= \{ \varphi_i(x), \int dy^3 \Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi_j(y))}\, G_j(\varphi(y)) - X^0(\varphi(y)) \Big) \}$$

$$= \{ \varphi_i(x), \int dy^3 \big(\pi_j(y)\, G_j(\varphi(y)) - X^0(\varphi(y)) \big) \} \qquad \pi(y) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \varphi(y))} \ \text{正準運動量}$$

$$= \int dz^3 \sum_k \Big[\underbrace{\frac{\delta\varphi_i(x)}{\delta\varphi_k(z)}}_{\uparrow = \delta_{ik}\, \delta^3(x-z)} \frac{\delta}{\delta\pi_k(z)} \int dy^3 \big(\pi_j(y)\, G_j(\varphi(y)) - X^0(\varphi(y)) \big) - \underbrace{\frac{\delta\varphi_i(x)}{\delta\pi_k(z)}}_{\uparrow = 0} \frac{\delta}{\delta\varphi_k(z)} \int dy^3 \big(\pi_j(y)\, G_j(\varphi(y)) - X^0(\varphi(y)) \big) \Big]$$

$$= \int dz^3 \sum_k \Big[\delta_{ik}\, \delta^3(x-z) \int dy^3 \Big(\underbrace{\frac{\delta\pi_j(y)}{\delta\pi_k(z)}}_{\uparrow = \delta_{jk}\, \delta^3(y-z)} G_j(\varphi(y)) - \underbrace{\frac{\delta X^0(\varphi(y))}{\delta\pi_k(z)}}_{\uparrow = 0} \Big) \Big]$$

$$= \int dz^3 \sum_k \Big[\delta_{ik}\, \delta^3(x-z) \int dy^3\, G_k(\varphi(z)) \Big]$$

$$= G_i(\varphi(x)) \qquad \int f(x)\, \delta(x-x')\, dx = f(x')$$

$$[\, i\, Q, \varphi_i(x)\,] = [\, i \int dy^3\, J^0(y), \varphi_i(x)\,]$$

$$= i \int dy^3\, [\, J^0(y), \varphi_i(x)\,]$$

$$= i \int dy^3\, [\, \pi_j(y)\, G_j(\varphi(y)) - X^0(\varphi(y), \varphi_i(x)\,]$$

$$= i \int dy^3\, \{ [\, \pi_j(y)\, G_j(\varphi(y)), \varphi_i(x)\,] - \underbrace{[\, X^0(\varphi(y), \varphi_i(x)\,]}_{\uparrow\ = 0} \}$$

$$= i \int dy^3\, [\, \pi_j(y), \varphi_i(x)\,]\, G_j(\varphi(y))$$

$$= G_i(\varphi(x)) \qquad [\, \pi_j(y), \varphi_i(x)\,]\, G_j(\varphi(y)) = -\, i\, \delta_{ij}\, \delta^3(x-y)\, G_j(\varphi(y)) = -\, i\, \delta^3(x-y)\, G_i(\varphi(y))$$

$$\int f(x)\, \delta(x-x')\, dx = f(x')$$

時空の並進対称性

座標変換において、無限小の平行移動を考える。

$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$　　$\Delta x^\mu = \epsilon^\mu$　　$\Delta x^\mu = \epsilon^\nu X_\nu{}^\mu(x)$ とすると $X_\nu{}^\mu = \delta_\nu{}^\mu$ である。

先の $j^{i\,\mu} = \dfrac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} \Gamma^i \phi_A + L\, X^{i\,\mu}$, $\Delta x^\mu = \epsilon^i X^{i\,\mu}(x)$, $\bar{\bar{\delta}}\phi_A(x) = \epsilon^i\, \Gamma^i \phi_A(x)$ において、i を ν にした形になる。

これに付随する場の無限小変換は

$\phi_A(x) \longrightarrow \phi_A{}'(x') = \phi_A(x)$ 、つまり、total change は、$\Delta\phi_A(x) = 0$

すると、$\bar{\delta}\phi = \Delta\phi(x) - \Delta x^\mu\, \partial_\mu\phi(x) = -\Delta x^\mu\, \partial_\mu\phi(x) = -\epsilon^\nu\, \delta_\nu{}^\mu\, \partial_\mu\phi(x) = -\epsilon^\mu\, \partial_\mu\phi(x)$

一方、$\bar{\delta}\phi_i(x) = \epsilon^\mu\, \Gamma_\mu\, \phi_i(x)$ なので、

$\Gamma_\mu = -\partial_\mu$

ネーターカレントは

$$j^{\nu\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\, \Gamma^\nu\phi_A + L\, X^{\nu\mu} = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\, \partial_\nu\, \phi_A + \delta_\nu{}^\mu\, L$$

次のように書くことが多い。　http://www.yam-web.net/science-note/RT.pdf「特殊相対性理論 / 場のエネルギー・運動量テンソル」

$$T_\nu{}^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\, \phi_i)}\, \partial_\nu\phi_i - \delta_\nu{}^\mu L \qquad \delta_\nu{}^\mu \text{ はクロネッカーのデルタ}$$

この $T_\nu{}^\mu$ はエネルギー・運動量テンソルである。 保存則は

$$\partial_\mu T_\nu{}^\mu = 0$$

であり、エネルギーと運動量の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$P_\nu = \int d^3x\ j_\nu{}^0$$

はエネルギー並びに運動量であり、時空の併進の生成子

$$[\, P_\mu\, , \phi_i(x)\,] = i\, \partial_\mu\phi_i(x)$$

となる。

ローレンツ変換

次のような無限小ローレンツ変換を考える。

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu\, x^\nu = x^\mu + \frac{1}{2}\,(\, \epsilon^{\mu\nu} - \epsilon^{\nu\mu}\,)\, x_\nu\ ,\quad \phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) - \frac{i}{2}\, \epsilon^{\mu\nu}\, S_{\mu\nu}\, \phi(x)$$

$$\Delta x^\mu = \frac{1}{2}\,(\, \epsilon^{\mu\nu} - \epsilon^{\nu\mu}\,)\, x_\nu \qquad \Delta\phi(x) = -\frac{i}{2}\, \epsilon^{\mu\nu}\, S_{\mu\nu}\, \phi(x)$$

ここで行列 $S_{\mu\nu}$ は、次のように定義される場のスピンである。

$$(S_{\mu\nu})_i^j\, \phi_j(x) = \begin{cases} 0 \quad (\, sclar\,) \\ i\,(\, g_{\mu i}\, \delta_\nu^j - g_{\nu i}\, \delta_\mu^j\,)\, \phi_j(x) \quad (\, vector\,) \\ \dfrac{i}{4}\,(\, \gamma_\mu\, \gamma_\nu - \gamma_\nu\, \gamma_\mu\,)_i^j\, \phi_j(x) \quad (\, spinor\,) \end{cases}$$

$$\bar{\delta}\phi(x) = \Delta\phi(x) - \phi_{,\mu}(x)\, \Delta x_\mu = -\frac{i}{2}\, \epsilon^{\mu\nu}\, S_{\mu\nu}\, \phi(x) - \frac{1}{2}\, \phi_{,\mu}(x)\,(\, \epsilon^{\mu\nu} - \epsilon^{\nu\mu}\,)\, x_\nu$$

$$j^\mu\, \epsilon = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\, \bar{\delta}\phi(x) + L\, \Delta x^\mu \qquad \epsilon = g_{\mu\nu}\, \epsilon^{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Big(-\frac{i}{2}\, \epsilon^{\sigma\nu}\, S_{\sigma\nu}\, \phi(x) - \frac{1}{2}\, \phi_{,\sigma}(x)\,(\, \epsilon^{\sigma\nu} - \epsilon^{\nu\sigma}\,)\, x_\nu\Big) + \frac{1}{2}\, L\,(\, \epsilon^{\sigma\nu} - \epsilon^{\nu\sigma}\,)\, x_\nu$$

$$= -i\, \frac{1}{2}\, \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\, \epsilon^{\sigma\nu}\, S_{\sigma\nu}\, \phi(x) - \frac{1}{2}\,(\, \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\, \partial_\sigma\phi(x) - \delta_\sigma{}^\mu L\,)\,(\, \epsilon^{\sigma\nu} - \epsilon^{\nu\sigma}\,)\, x_\nu \qquad T_\nu{}^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\, \phi)}\, \partial_\nu\phi - \delta_\nu{}^\mu L$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\, i\, \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\, \epsilon^{\sigma\nu}\, S_{\sigma\nu}\, \phi(x) + T_\sigma{}^\mu\,(\, \epsilon^{\sigma\nu} - \epsilon^{\nu\sigma}\,)\, x_\nu\Big)$$

改めて、ネーターカレントを次のように置こう。

$$M_{\nu\rho}{}^\mu = x_\nu\, T_\rho{}^\mu - x_\rho\, T_\nu{}^\mu - i\, \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\, \phi)}\, S_{\nu\rho}\, \phi(x)$$

この $M_{\nu\rho}{}^\mu$ を角運動量密度という。 $M_{\nu\rho}{}^\mu$ は ν, ρ について反対称である。 保存則は

$$\partial_\mu\, M_{\nu\rho}{}^\mu = 0$$

であり、角運動量の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$M_{\nu\rho} = \int d^3x\, M_{\nu\rho}{}^0$$

は角運動量とブースト演算子となる。

位相変換

自由電子場のラグランジアン密度 $L(x)=\bar{\psi}(x)\,(\,i\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}-m\,)\,\psi(x)$　　$\bar{\psi}=\psi^{\dagger}\,\gamma^{0}$ Dirac 共役な場

位置（x）によらない位相変換 $\psi(x)\longrightarrow e^{\,i\,e\,\epsilon}\,\psi(x)\approx(1+i\,e\,\epsilon)\,\psi(x)$,　$\bar{\psi}(x)\longrightarrow e^{\,-i\,e\,\epsilon}\,\bar{\psi}(x)$

$\bar{\delta}\psi(x)=\epsilon\,\Gamma\,\psi(x)\quad\rightarrow\quad\Gamma=i\,e$

$$j^{\mu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\psi)}\,\Gamma\,\psi=-\,e\;\bar{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\,\psi(x)$$

ネーターチャージ $Q=\int d^{3}x\,j^{0}$ は電荷である。

$j^{0}=-\,e\,\bar{\psi}\,\gamma^{0}\,\psi=-\,e\,\psi^{\dagger}\,\psi$ は電子の確率密度みなせる。　$\gamma^{0}\,\gamma^{0}=I$

http://www.yam-web.net/science-note「量子力学 補論 2-4」参照

参考資料

https://www.weblio.jp/wkpja/content/ 対称性 +%28 物理学 %29_ 物理的対称性の数学

「局所的」対称性に基づく物理理論の重要な型はゲージ理論と呼ばれ、そのような理論に自然な対称性はゲージ対称性と呼ばれる。標準模型におけるゲージ対称性は、SU(3) × SU(2) × U(1) 群に基づいており、基本相互作用の三つを記述するために用いられる（大まかに言って、SU(3) 群の対称性は強い相互作用を、SU(2) 群は電弱力を、そして U(1) 群は電磁力を記述する。)。

物理系の対称性の性質は系を特徴付ける保存則と深く関係している。ネーターの定理はこの関係を厳密に記述している。この定理によると、物理系の連続的対称性は系のある物理的性質が保存することを暗示している。反対に、ある保存された量はそれに対応する対称性を持っている。

いくつかの基本的な対称性および関連する保存量

クラス	不変性	保存量
順時 (proper orthochronous) ローレンツ対称性 (Lorentz symmetry)	時間並進 （均質性）	エネルギー
	空間並進 （均質性）	線形運動量
	空間回転 （等方性）	角運動量
離散的対称性	P, 座標反転	空間パリティ
	C, 荷電共役変換	C パリティ
	T, 時間反転	T パリティ
	CPT	パリティの積
内部対称性（時空座標に独立）	U(1) ゲージ変換	電荷
	U(1) ゲージ変換	レプトン生成数
	U(1) ゲージ変換	超電荷
	U(1)Y ゲージ変換	弱超電荷
	U(2) [U(1) × SU(2)]	電弱力
	SU(2) ゲージ変換	アイソスピン
	SU(2)L ゲージ変換	弱アイソスピン
	P × SU(2)	G パリティ
	SU(3) " 回転数 "	バリオン数
	SU(3) ゲージ変換	クォークカラー
	SU(3)（近似的）	クォークフレーバー
	S(U(2) × U(3)) [U(1) × SU(2) × SU(3)]	標準模型

https://www.wikiwand.com/ja/ チャージ _(物理学)

物理学において、チャージ (荷量、charge) は電磁気学における電荷および磁荷や量子色力学における色荷などの種々の物理量を一般化した概念である。チャージは保存された量子数と関連している。

より抽象的には、チャージは対象とする物理系の連続対称性の任意の生成作用素（生成演算子）である。物理系がある種の対称性を持つとき、ネーターの定理は保存カレントの存在を示唆する。カレントにおいて “流れているもの” がチャージに相当し、チャージは（局所）対称性の生成演算子である。このチャージは、ネーターチャージと呼ばれることがある。

例えば、電磁気学においては、U(1) 対称性の生成演算子が電荷であり、保存するカレントは電流である。

局所的には、あらゆるチャージと関連する力学的な対称性はゲージ場である。この理論では、チャージはそのゲージ場を "放射" する。このように考えたとき、例えば、電磁気学のゲージ場は電磁場であり、ゲージ粒子は光子である。" チャージ " という言葉は、対称性の生成演算子を言及する " 生成演算子 " の類義語として使われることがある。より正確には、対称群がリー群のとき、そのチャージはリー群のルート系に一致するものとして理解することができ、ルート系の離散性によってチャージの量子化を説明することができる。

チャージの例
様々なチャージの量子数が素粒子物理学の理論によって導入されている。これらは標準模型のチャージを含む：
- 色荷：クォークがもつチャージで、色荷は量子色力学の SU(3) カラー対称性を生成する。
- 弱アイソスピン：弱荷とも。電弱相互作用の量子数であり、電弱 SU(2) × U(1) 対称性の SU(2) 部分を生成する。弱アイソスピンは局所対称であり、そのゲージ粒子は W ボソンと Z ボソンである。
- 電荷：電磁相互作用のチャージ。

近似的対称性のチャージ :
- アイソスピン：対称群は SU(2) フレーバー対称である。ゲージ粒子はパイ中間子である。パイ中間子は基本粒子ではなく、その対称性は近似的である。それはフレーバー対称性の特別な場合である。
- フレーバー量子数：ストレンジネスやチャームのような粒子のチャージで量子数でもある。これらは基本粒子の大域 SU(6) フレーバー対称性を生成する。この対称性は重いクォークの質量により悪く破れる (badly broken symmetry) 。

標準模型を拡張する仮説上のチャージ :
- 電磁気学理論の新しいチャージである磁荷：磁荷は実験によって観測されていないが、磁気単極子などの理論に現れる。
- X 荷：大統一理論（GUT）において、U(1)X 対称性に相当するネーター・チャージ。GUT の破れによりバリオン数とレプトン数が生じる。

素粒子理論の形式化において、チャージ型の量子数はチャージ共役演算子 C によって反転できるものがある。カイラルフェルミオンについては反転できないものが多い。チャージ共役は、二つの等価でないが同型である群表現内に起こる所定の対称群を単に意味する。普通は、二つのチャージ共役表現はリー群の基本表現である。そのとき、それらの積は群の随伴表現を形成する。
一般的な例として、SL(2,C)（スピノル）の二つのチャージ共役基本表現の積はローレンツ群 SO(3,1) の随伴表現である。抽象的には、次のように書くことができる：
$2 \otimes 2^* = 3 \oplus 1$