回転群のリー代数

３次元実ユークリッド空間 E^3 の回転は、３次元の実ベクトルを実ベクトルに移す行列 R で、

$R^{-1} = R^t$（直交行列 $AA^t = A^tA = 1$、直交行列の行列式の値は ±1）および det R = 1 を満たす行列の作る群を指す。

n 次直交行列全体の集合を n 次直交群といい、**O**(n) と書く。行列式の値が 1 となる直交行列全体の集合を特殊直交群といい、**SO**(n) と書く。

３次元の回転演算子 $\hat{R}(\boldsymbol{\phi})$ は、以下のように直交する２つの軸の回転を組み合わせて実現できる。

定理　３次元ユークリッド空間の直交する３つのベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とし、$\mathbf{e}$ を軸とする角 α の回転を $\hat{R}_\alpha(\mathbf{e})$ で表すとする。すると回転群 **SO**(3) の任意の元は、$\hat{R}(\mathbf{e}_i)$（$i = 1, 2, 3$）のうち２種、たとえば $\hat{R}(\mathbf{e}_2)$ と $\hat{R}(\mathbf{e}_3)$ の組み合わせで生成され、$\hat{R}_{\alpha\beta\gamma} = \hat{R}_\alpha(\mathbf{e}_3)\,\hat{R}_\beta(\mathbf{e}_2)\,\hat{R}_\gamma(\mathbf{e}_3)$ と表わされる。

ただしここに、$\hat{J}_i$ を $\mathbf{e}_i$ のまわりの回転生成演算子として $\hat{R}_\alpha(\mathbf{e}_i) = \exp(-i\,\alpha\,\hat{J}_i)$（$i = 1, 2, 3$）とする。

通常は、$\hat{R}_\alpha, \hat{R}_\beta, \hat{R}_\gamma$ の表現を

$$R_\alpha(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\beta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$R_\gamma(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ととって、(α, β, γ) をオイラー（Euler）角と呼ぶ。

$$R_{\alpha\beta\gamma} = R_\alpha(\mathbf{e}_3)\,R_\beta(\mathbf{e}_2)\,R_\gamma(\mathbf{e}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\beta\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \sin\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\alpha \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}$$

リー代数とその表現

$\mathbf{e}_1$ 軸のまわりに角度 α だけ回転させる行列は、

$$R_\alpha(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となる。

α を微小量として J_1 を $\hat{J}_1$ の行列表現とすれば、

$$R_\alpha(\mathbf{e}_1) \equiv \exp(-i\,\alpha\,J_1) \approx 1 - i\,\alpha\,J_1 \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

同様に、　（β, γ は微小量）

$$R_\beta(\mathbf{e}_2) \equiv \exp(-i\,\beta\,J_2) \approx 1 - i\,\beta\,J_2 \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_\gamma(\mathbf{e}_3) \equiv \exp(-i\,\gamma\,J_3) \approx 1 - i\,\gamma\,J_3 \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J_1, J_2, J_3 の交換関係は、すぐ確かめられるように $[J_1, J_2] = iJ_3$, $[J_2, J_3] = iJ_1$, $[J_3, J_1] = iJ_2$

あるいは、$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k$

ϵ_{ijk} はレビ・チビタ（Levi-Civita）記号

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i\,j\,k)\ が\ (1, 2, 3)\ の偶置換 \\ -1 & (i\,j\,k)\ が\ (1, 2, 3)\ の奇置換 \\ 0 & それ以外 \end{cases}$$

ϵ_{ijk} は３次元回転群 **SO**(3) のリー代数を定める構造定数構造定数に対応する。

ここでの J_1, J_2, J_3 は、そのリー代数の随伴表現と一致する。また、そのウエイトはとくにルート（root）と呼ばれ、随伴表現とそのルートは、リー代数においては表現を求める上でより基本的な役割を果たす。

回転群 **SO**(3) の場合は、まず交換関係 $[\mathrm{J}_i, \mathrm{J}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\mathrm{J}_k$ を満たす代数の既約表現 J_a $(a = 1, 2, 3)$ を求める。

すると一般の回転群 **SO**(3) の表現は

$$\mathrm{D}(\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma}) = \exp(-i\,\alpha\,\mathrm{J}_3)\exp(-i\,\beta\,\mathrm{J}_2)\exp(-i\,\gamma\,\mathrm{J}_3)$$

で与えられる。

k 軸まわりの角度 τ の回転行列を $G_k(\tau)$ とかいたとき、無限小変換を与える行列は $G_k(\epsilon) = 1 - i\,\epsilon\,J_k$ なので、

$$\frac{d}{d\tau} G_k(\tau) = -i\,J_k\,G_k(\tau)$$

テーラー展開より、

$$G_k(\tau) = \sum_n \frac{\tau^n}{n!}\frac{d^n}{d\tau^n} G_k(\tau)\Big|_{\tau=0} = \sum_n \frac{\tau^n}{n!}(-i\,J_k)^n G_k(0) = e^{-i J_k \tau}$$

SU(2) スピン表現

回転群の場合、無限小変換のなすリー代数は

$[\hat{\mathrm{J}}_i, \hat{\mathrm{J}}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\hat{\mathrm{J}}_k$　　抽象化するために一般の演算子として表示している

を満たしているが、この生成元の交換関係は、次のパウリ行列（2 × 2 エルミート行列）でも実現することができる。

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

パウリ行列は、$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k$ という交換関係が成り立つので、

$$\hat{\mathrm{J}}_i = \frac{1}{2}\sigma_i$$

とすると、同一の交換関係を満たしている。つまり、パウリ行列は無限小回転の生成元の表現を与えている。

この場合の表現行列は、次のようになる。

$$\mathrm{D}^{(1/2)}(\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma}) = \exp(-i\,\alpha\,\sigma_3/2)\exp(-i\,\beta\,\sigma_2/2)\exp(-i\,\gamma\,\sigma_3/2)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix} \qquad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

この 2 次元表現の行列によって回転されるベクトル（単に複素数の組）$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$をスピノルと呼ぶ。

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、$\mathrm{P} = \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} z & x - i\,y \\ x + i\,y & -z \end{pmatrix}$ は $\mathrm{U} = \mathrm{D}^{(1/2)}(\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma})$ によって、$\mathrm{P}' = \mathrm{U}\,\mathrm{P}\,\mathrm{U}^\dagger$ と回転する。

しかしここで、オイラー角（α, β, γ）の変域を通常通り $0 \leqq \alpha,\ \gamma < 2\pi,\ 0 \leqq \beta < \pi$ ととると $(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma) = (2\pi\ \ 0\ \ 0)$ のとき $\mathrm{D}^{(1/2)}(\mathrm{R}_{2\pi 0 0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となって単位行列にはならない（0 と 2π ときが一致しない）。変域をかえて $0 \leqq \alpha,\ \gamma \leqq 4\pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi$ ととれば $(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma) = (4\pi\ \ 0\ \ 0)$ のとき $\mathrm{D}^{(1/2)}$ は単位行列になるが、この表現を許すと、１つの空間回転に対して２つの表現 $\mathrm{D}^{(1/2)}$、$-\mathrm{D}^{(1/2)}$ が存在することになる。この事情はスピンが半奇数の場合は一般に起こるので、これらは回転群 **SO**(3) の２価表現あるいは射影表現（projective representation）と呼ばれている。

２ × ２行列に対してパラメーター変域 $0 \leqq \alpha,\ \gamma \leqq 4\pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi$ をもつ変換は、**SU**(2) 群と呼ばれる群である。この意味で、半奇数スピン表現は **SU**(2) の表現であるが、**SO**(3) の表現ではない。

回転群 **SO**(3) のパラメーター空間は、球面上の対極点が同一視されるから、コンパクトではあるが単連結な空間ではない。一方、**SU**(2) 群のパラメーター空間は、ユニタリ行列の作る群であるから、コンパクトで単連結である。**SO**(3) も **SU**(2) も同一のリー代数を持っているので、リー代数を使って求めた表現は **SU**(2) の表現になる。このうちパラメーター変域 $0 \leqq \alpha,\ \gamma < 2\pi,\ 0 \leqq \beta < \pi$ に対して 1 価表現になるもの（j が 0 および正整数のとき）が **SO**(3) の表現になるということである。つまり、**SU**(2) は **SO**(3) の普遍被覆群ということになる。$\mathbf{C}_2$ を 2 次の巡回群として、$\mathbf{SO}(3) = \mathbf{SU}(2)/\mathbf{C}_2$ の関係になる。

共通なリー代数をもつリー群でも、この普遍被覆群とはパラメーターの変域が異なり、大域的な構造が異なるリー群が存在し得る。これらの群は単連結なパラメーター空間にさまざまな制限を付けることによって得られ、群としては普遍被覆群の部分群となっている。

角運動量演算子、カシミア演算子、昇降演算子

$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,\hat{J}_k$ の $\hat{J}_a$ は角運動量演算子と呼ばれている。

ここで、カシミア演算子と呼ばれる演算子 $\hat{\mathbf{J}}^2$ を $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_1{}^2 + \hat{J}_2{}^2 + \hat{J}_3{}^2$（全角運動量）で定義する。

交換関係　$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_1] = [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_2] = [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_3] = 0$ を得る（交換可能）。

$\hat{J}_3$，$\hat{\mathbf{J}}^2$ は交換可能であるから、共通な固有ベクトルが存在し、

$\hat{J}_3 \,|\, j, m > = m \,|\, j, m >$

$\hat{\mathbf{J}}^2 \,|\, j, m > = j \,|\, j, m >$

$\hat{J}_a$ $(a = 1, 2, 3)$ の代わりに、$\hat{J}_3$，$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\,\hat{J}_2$ を独立な演算子として採用する。

$\hat{J}_+$ と $\hat{J}_-$ は互いにエルミート共役　　$\hat{J}_-{}^\dagger = \hat{J}_+$，$\hat{J}_+{}^\dagger = \hat{J}_-$

交換関係は $[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$，$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_\pm] = 0$，$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3$ となる。

これらより以下が導かれる。（詳細は http://www.yam-web.net/science-note 「群論 / 回転群」参照）

$\hat{\mathbf{J}}^2 \,|\, j, m_j > = j(j+1) \,|\, j, m_j >$　　j のとりえる値は、0，1/2，1，3/2，2，…………

$\hat{J}_3 \,|\, j, m_j > = m_j \,|\, j, m_j >$　　　m_j のとりえる値は、$j,\ j-1,\ \ldots\ldots,\ -j+1,\ -j$

$\hat{J}_\pm \,|\, j, m_j > = \sqrt{(j \mp m_j)(j \pm m_j + 1)}\ |\, j, m_j \pm 1>$　　昇降演算子

このように、回転群の表現は j の値で特徴づけられ、j の値が与えられると、2 j + 1 個の $\hat{J}_3$ の固有ベクトルが定まり、2 j + 1 次元のベクトル空間が定まる。m_j は一般にウエイト（weight）と呼ばれ、その上限 j は最高ウエイト（ highest weight）と呼ばれる。

特に、j = 1（**SO**(3) スピン 1）の表現は、上で述べたようにリー代数の随伴表現であり、そのウエイトはルートと呼ばれる。

・回転群の既約表現 D_j は j で定まり、カシミア演算子（全角運動量）$\hat{\mathbf{J}}^2$ の固有値は $j(j+1)$ である。

・表現空間 V_j の基底 $|\, j, m_j >$ は $\hat{J}_3$ の固有値ウェイト m_j でラベルされ、$m_j = j,\ j-1,\ \ldots\ldots,\ -j+1,\ -j$ の値をとる。V_j は $2j+1$ 次元空間である。

既約表現を区別する数 j を物理学ではスピンあるいは角運動量の大きさと呼んでいる。

●スピンが 0 (j = 0) の場合は、回転群のリー代数がすべて 0、したがって回転行列はすべて 1 となり、恒等表現にほかならない。

●スピンが 1 (j = 1) の場合は、$\hat{J}_a$ $(a = 1, 2, 3)$ が 3×3 行列で与えられ、それぞれの具体形は最初に見た

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。これを $D(R_{\alpha\beta\gamma}) = \exp(-i\,\alpha\,J_3)\exp(-i\,\beta\,J_2)\exp(-i\,\gamma\,J_3)$ に代入すれば、結果はオイラー回転行列そのものである。

●スピンが 1/2 (j = 1/2) の場合は、「スピン表現」で見た通り、2×2 のパウリ行列で表現される。

注意するべきことは、指数 $\exp(-i\,\theta\,J_i)$ の肩に 1/2 がついてくるために、2π 回転ではなく 4π 回転しないと元に戻らないことで、例えば回転の単位元 $\theta = 0$, 2π がそれぞれ別の 2 個の元に対応してしまう。これは、厳密な意味での表現ではなく、スピン表現が回転群の 2 価表現になっていることを意味している。

このスピン表現は **SU**(2) の基本表現になっている。

SO(3) = **SU**(2)/$\mathbf{C}_2$ である（$\mathbf{C}_2$ は 2 位の巡回群）。ここで見たことは、リー環が同形であっても必ずしも群が同形であるとは限らないことを示している。この準同型写像の構造は

$1 \to \mathbf{C}_2 \to \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3) \to 1$

と表すことができる。

スピン量子数が半整数 1/2 , 3/2 , ... になる粒子をフェルミオン、整数 0 , 1 , 2 , ... になる粒子をボゾンといい、両者の物理的性質は大きく異る。

・フェルミオンである素粒子のスピン量子数は全て 1/2 である。

・ボゾンである素粒子はヒッグス粒子のみスピン量子数が 0 であり、それ以外のボゾン素粒子のスピン量子数は 1 である。

複合粒子のスピン量子数はそれ以外の値も取りうるが、単純に複合粒子を構成する素粒子のスピン量子数の合計値になるわけではない。例えばヘリウム原子のスピン量子数は 0 であるが、これを構成する素粒子である電子やクォークはいずれもフェルミオンであり、したがってそのスピン量子数は半整数である。

回転群のリー代数

リー代数の基底の交換関係 $[L_a, L_b] = i\,C^c{}_{ab}\,L_c$　(a, b, c = 1, 2, ..., d　d はその次元) がリー群の構造を決定する。

SO(3) と **SU**(2) のリー代数は同一。　$[J_i , J_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,J_k$　　J_1 , J_2 , J_3

SO(3)　$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

この J_1 ， J_2， J_3 はリー代数の随伴表現。随伴表現の定義からリー代数の次元 d と同じ次数の行列となる。

SU(2)　$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$　$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

リー代数のランク：一次独立な生成元のうち互いに可換なものの最大個数。これを $\{H_a\ ;\ a = 1, \ldots , r\}$ とすると、この r がランク。

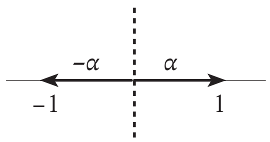
回転群の **SO**(3), **SU**(2) はランク 1 、つまり 1 次元。

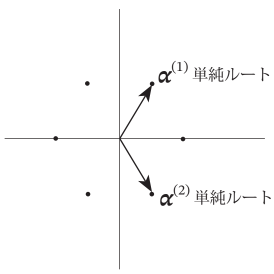
ちなみに、**SU**(3), **SO**(5), $\mathbf{G}_2$ はランク 2 であり、ルートは 2 次元ベクトルとなる。

ルート

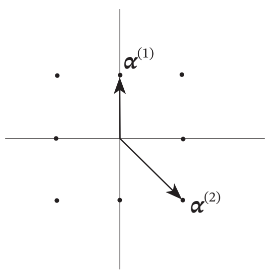
H_a は互いに交換するので、d−r 個の固有ベクトルはすべての $\mathrm{ad}(H_a)$（随伴表現　a = 1, ⋯ , r）について共通に取ることができて、このとき、共通に取った各同時固有ベクトルに対応する固有値 α_a (a = 1, ⋯ , r) は r 次元ベクトル空間のベクトル成分とみなすことができる。このベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ がルート（± のペアを含めて d−r 個あることになる)。

SO(3), **SU**(2)

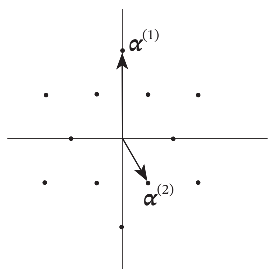




SU(3)



SO(5)



$\mathbf{G}_2$

ウエイトと既約表現

随伴表現から一般の既約表現に枠をひろげたのが、ウエイト μ である（随伴表現の場合はウエイト μ がルート α に一致する)。

最高ウエイトは既約表現を一意に決める重要なパラメータとなる。（最高ウエイトを指定することによって既約表現が 1 つ、そしてただ 1 つ定まる。）

最高ウエイト μ をもつ既約表現Dは、r 個の 0 か正の整数の組 $[\,m^{(1)}, m^{(2)}, \cdots, m^{(r)}\,]$（ディンキン・インデックス）によって完全に指定される。　$2\,\dfrac{(\alpha^{(i)}\cdot\mu)}{(\alpha^{(i)}\cdot\alpha^{(i)})} = m^{(i)}$　(1)

μ が最高ウエイトでないときは、負の整数も含む整数となる。

j 番目のインデックス $m^{(j)}$ が 1 で、他はすべて 0（例 $[\,0, 1, 0, 0\,]$）になるような最高ウエイト $\omega^{(j)}$ を基本ウエイトという。　$2\,\dfrac{(\alpha^{(i)}\cdot\omega^{(j)})}{(\alpha^{(i)}\cdot\alpha^{(i)})} = \delta^{ij}$　(2)

また、この $\omega^{(i)}$ を最高ウエイトとしてもつ r 個の $[\,0, 1, 0, 0\,]$ 等の表現を基本表現という。

一般のディンキン・インデックスに対応する任意のウエイトは、$m^{(i)}$ の組に対して、$\mu = \sum_{i=1}^{r} m^{(i)}\,\omega^{(i)}$ (3) で与えられる。

詳細は、http://www.yam-web.net/science-note 「群論 / V 単純リー代数とルート空間 /10 ウエイトと既約表現」参照

最高ウエイトからその他のウエイトを求めていく

最高ウエイト状態が求まると、それに単純ルート $\alpha^{(i)}$ に対する $E_{-\alpha^{(i)}}$ を順次作用させて既約表現をつくることが可能である＝既約表現のその他のウエイトは、最高ウエイトから単純ルートを順次引いていくことによって得られる。

$\mu' = \mu - \sum_{j=1}^{r} k_j\,\alpha^{(j)}$　(k_j は 0 か正の整数)　(4)

この時、(1) とカルタン行列 $C_{ij} = 2\,\dfrac{(\alpha^{(i)}\cdot\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)}\cdot\alpha^{(j)})}$ の定義より

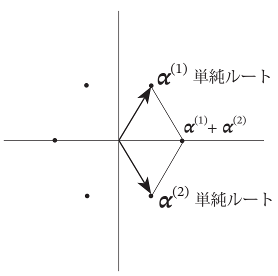
$2\,\dfrac{(\alpha^{(i)}\cdot\mu')}{(\alpha^{(i)}\cdot\alpha^{(i)})} = m^{(i)} - \sum_{j=1}^{r} k_j\,C_{ji} \equiv p^{(i)}$　(5)

であるから、一般のウエイトは最高ウエイトのディンキン・インデックス $[\,m^{(1)}, m^{(2)}, \cdots, m^{(r)}\,]$ からカルタン行列の行の成分 $(C_{j1}, C_{j2}, \cdots, C_{jr})$ を順次引いていくことによって得られる。単純ルートは 1 次独立だから、(4) によりウエイトは $[p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(r)}]$ によって表される。$\sum_{j=1}^{r} k_j$ をウエイトのレベルという。* から、最高ウエイトから出発して (5) の $p^{(i)}$ が正の時は $\alpha^{(i)}$ を引いていくことができる。こうして、各レベルのウエイトを求めることができる。

*　μ がウエイトであるとすると、$\mu' = \mu - 2\,\dfrac{(\alpha\cdot\mu)}{(\alpha\cdot\alpha)}\,\alpha$ もウエイトである。

SU(3)（ランク 2）の場合　　詳細は、http://www.yam-web.net/science-note 「群論 / VI リー群の具体例 SU(3)」参照

単純ルートは、$\alpha^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と $\alpha^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



カルタン行列は、$C_{ij} = 2\,\dfrac{(\alpha^{(i)}\cdot\alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)}\cdot\alpha^{(j)})} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) より基本ウエイトを求めると、$\omega^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $\omega^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

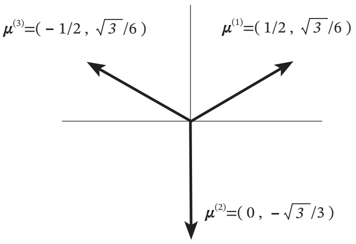
これらを用いてルートを表わしたとき、その係数がルートのディンキン・インデックスである。

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}=(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})=2\,\boldsymbol{\omega}^{(1)}-\boldsymbol{\omega}^{(2)}\quad\rightarrow\quad[\,2,\,-1\,]\qquad \mathrm{m}^{(i)}=2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(1)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(i)})}\ (1)$$

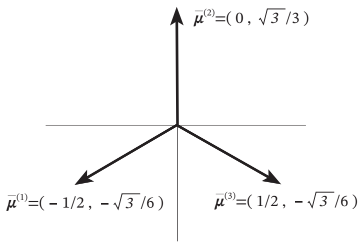
$$\boldsymbol{\alpha}^{(2)}=(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2})=-\,\boldsymbol{\omega}^{(1)}+2\,\boldsymbol{\omega}^{(2)}\quad\rightarrow\quad[\,-1,\,2\,]\qquad \mathrm{m}^{(i)}=2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(2)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(i)})}$$

また、このディンキン・インデックスは、カルタン行列の 1 行目と 2 行目に一致する。

SU(3) の基本表現 [1, 0]、[0, 1]



[1, 0]：**3** 表現



[0, 1]：**3*** 表現

SU(3) の場合、最高ウエイトの Dynkin index は 2 つの成分 [$\mathrm{m}^{(1)}$, $\mathrm{m}^{(2)}$] を持っているが、その最高ウエイトは $\boldsymbol{\mu}=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{m}^{(i)}\,\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ (3) である。

その他の高次元表現

[2 , 0] = **6** , [0 , 2] = **6***

[1 , 1] = **8**　8 次元表現は随伴表現に一致する。

[3 , 0] = **10** , [0 , 3] = **10***

………………………………

回転群（ランク 1）の場合

随伴表現

$$J_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\qquad J_2=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}\qquad J_3=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

カルタン部分代数として J_1 をとると、

$$H_1=J_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$$

固有値は $\alpha=\pm 1$ で、規格化固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{v}_-=\boldsymbol{v}_+{}^*$

カルタン計量は、$g_{ij}=\epsilon_{aib}\,\epsilon_{bja}=-2\,\delta_{ij}$

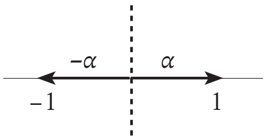
カルタン標準形 $\{H_1,E_+,E_-\}$

$E_+=v^i{}_+J_i,\ E_-=v^i{}_-J_i=v^i{}_+{}^*J_i$ より、

$$E_+=E_-{}^{\dagger}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&i\\-1&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}$$

$[H_1,E_\pm]=\pm E_\pm\ ,\ \ [E_+,E_-]=H_1$

ルート空間は 1 次元でそのルートの大きさを $\alpha=1$ にとれば、$\boldsymbol{\alpha}$ 自身に対するワイル鏡映は $-\boldsymbol{\alpha}$ になる。これは角運動量 $j=1$（スピン 1）の場合にあたる。



単純ルートは、$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = 1$

カルタン行列は、$C_{ij} = 2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(j)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(j)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(j)})} = 2$

基本ウエイトは、$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \dfrac{1}{2}$　　←　　$2\,\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega}^{(j)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = \delta^{ij}$ (2)

これらを用いてルートを表わしたとき、その係数がルートのディンキン・インデックスである。

$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = 2\,\boldsymbol{\omega}^{(1)}$　　→　　[2]　　このディンキン・インデックスは、カルタン行列に一致する。

基本表現 [1]　最高ウエイト $\frac{1}{2}$、全ウエイト $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$

その他の高次の既約表現

[2]　最高ウエイト 1、全ウエイト − 1, 0, 1　　随伴表現に一致

[3]　最高ウエイト $\frac{3}{2}$、全ウエイト $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$

………………………………