ポアンカレ群

ローレンツ変換に空間の並進操作を組み合わせた変換は群をなす。これをポアンカレ群 (あるいは非斉次ローレンツ群) という。ポアンカレ群はミンコフスキー空間の任意の 2 点間の距離を不変にする実 1 次変換全体の作る群である。

ポアンカレ群：ポアンカレ変換の為す変換群。10 次元の非コンパクトリー群である。

ポアンカレ変換：ミンコフスキー空間における等長変換である。等長変換においては内積が保存される。

ミンコフスキー空間の座標 x に対する並進とローレンツ変換

並進　$x^\mu \ \rightarrow \ x'^\mu = x^\mu + a^\mu$

ローレンツ変換　$x^\mu \ \rightarrow \ x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

ここで、a , Λ は変換のパラメータである。

これらをまとめて、ポアンカレ群 P の元 (a, Λ) に対応する変換は

$$x'^\mu = \sum_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

と書ける。

積は $(a_2 , \Lambda_2)(a_1 , \Lambda_1) = (\Lambda_2 a_1 + a_2 , \Lambda_2\Lambda_1)$ で定義される。

群の単位元は $(0 , 1)$、逆元は $(a , \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a , \Lambda^{-1})$ である。

ローレンツ群 L は変換 $(0 , \Lambda)$ よりなるポアンカレ群の部分群、空間の並進群 T は変換 $(a , 1)$ よりなるポアンカレ群の不変部分群である。

後者は $\forall(a , \Lambda) \in$ P に対して、$(a , \Lambda)(b , 1)(a , \Lambda)^{-1} = (\Lambda b , 1)$ が成立する。

並進群 T が不変部分群であることから、剰余類群 P/T がローレンツ群に同型であることが分かる。

$$\mathrm{P/T} \cong \mathrm{L}$$

並進群

並進群の生成元は 4 元運動量演算子 $P_\mu = -i\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ であり、そのユニタリ表現は

$$U(a) = exp\,(\,i \sum_\mu a^\mu P_\mu\,)$$

で与えられる。リー代数は可換 $[\,P_\mu , P_\nu\,] = 0$ なので、並進群はアーベル群である。

微小変化 $U(\varepsilon) = exp\,(\,i\,\varepsilon^\mu P_\mu\,)$ を試してみると、$P_\mu = -i\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ が並進を引き起こしていることがわかる。

$$\begin{aligned} U(\varepsilon)\,\phi(x) &= exp\,(\,i\,\varepsilon^\mu P_\mu\,)\,\phi(x) = \phi(x) + \ i\,\varepsilon^\mu P_\mu\,\phi(x) \\ &= \phi(x) + \varepsilon^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\phi(x) \\ &= \phi(x+\varepsilon) \end{aligned}$$

ローレンツ群（$\mathbf{O}(3,1)$）

$\Lambda = e^{iM} \simeq 1 + i\,M$ と書くと、ローレンツ群のリー代数は

$$M^T g + g\,M = 0 \qquad *1$$

http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science010.pdf 参照

を満たす行列 $M \in \mathfrak{gl}(4,\mathbf{R})$ の集合である。

*1 を満たすものとして次の 6 個の基底となる行列を選ぶことができる。

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ M_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

他の成分は $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$（$M_{00} = 0, \cdots, M_{33} = 0$）で定義される。

任意の行列 M はこの $M_{\mu\nu}$ を用いて次のように表される。

$$M = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \qquad (\Lambda = e^{iM} \simeq 1 + iM)$$

$\mathbf{O}(3,1)$ のリー代数 $M_{\mu\nu}$ は次の交換関係を満足する。

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} \qquad *2$$

ローレンツ群のリー代数を微分演算子で表現すると

$$M_{\mu\nu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu$$

と書ける。これはローレンツ群のリー代数が満たすべき関係式 *2 を満足することが分かる。特に、$M_{\mu\nu}$ の空間成分は空間回転の生成子である角運動量演算子

$$M_{23} = i L_x, \; M_{31} = i L_y, \; M_{12} = i L_z$$

を与える。また、$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu$ である。

まとめると

このようにして、ポアンカレ群のリー代数は $\{M_{\mu\nu}, P_\mu\}$ で与えられ、ポアンカレ群のリー代数は、次の交換関係をみたす。

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$
$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}$$

生成子

並進の生成子 P は運動量、ローレンツ変換の生成子 M は角運動量である。 ミンコフスキー空間上の関数（スカラー場）$\phi(x)$ を考えると

$$[P_\mu, \phi_i(x)] = -i\,\partial_\mu \phi_i(x)$$
$$[M_{\mu\nu}, \phi(x)] = -i\,(x_\mu \partial_\nu \phi(x) - x_\nu \partial_\mu \phi(x))$$

となる。

（並進）

平行移動の変換を ϵ^μ を定数として $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ とする。

$$\Delta x^\mu = \epsilon^i X^{i\mu}(x) \qquad \Delta\phi(x) = \epsilon^i \Phi^i \qquad \bar{\delta}\phi(x) = \epsilon^i \Gamma^i \phi(x)$$

$$\bar{\delta}\phi(x) = \Delta\phi(x) - \phi_{,\mu}(x)\Delta x_\mu = (\Phi^i - \phi_{,\mu}(x) X^{i\mu})\,\epsilon^i$$

$$j^{i\mu} \equiv -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Gamma^i \phi - L X^{i\mu}$$

http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science012.pdf 「ネーターの定理」参照
ここでは一般的なエネルギー・運動量テンソルの形式に合わせて、j の符号を調整している。

以上に $\Delta x^\mu = \epsilon^\mu$, $\Delta\phi = 0$ を適用していくと、

$$\bar{\delta}\phi = -\partial_\mu \phi(x)\,\epsilon^\mu \qquad \to \qquad \Gamma^\mu = -\partial_\mu$$

また $j^{i\mu}$ より、$T_\nu^{\ \mu} = \dfrac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu \phi - \delta_\nu^{\ \mu} L$ 　エネルギー・運動量テンソル

$$G = \int d^3x\, T_\nu^{\ 0} = \int d^3x\,(\pi\,\partial_\nu \phi - \delta_\nu^{\ 0} L) = P_\nu$$ ネーターチャージ

$$\{G_\delta, \phi\} = \bar{\delta}\phi \qquad G_\delta = \varepsilon G$$
$$\{P_\mu, \phi\} = -\partial_\mu \phi(x)$$

これを演算子化することで、交換関係として次を得る。

$$[\hat{P}_\mu, \hat{\phi}(x)] = -i\,\partial_\mu \hat{\phi}(x)$$

演算子化した場 $\hat{\phi}(x)$ の平行移動は、$U\hat{\phi}(x)U^\dagger = exp(i\hat{P}\epsilon)\,\hat{\phi}(x)\,exp(-i\hat{P}\epsilon)$ で与えられる。

ハウスドルフの公式：$exp(\hat{A})\,\hat{B}\,exp(-\hat{A}) = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \dfrac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots$ より、

$$U\hat{\phi}(x)U^\dagger = \hat{\phi}(x) + [i\hat{P}\epsilon, \hat{\phi}(x)] + \frac{1}{2}[i\hat{P}\epsilon, [i\hat{P}\epsilon, \hat{\phi}(x)]] + \cdots$$
$$= \hat{\phi}(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\phi}(x) + O(\epsilon^2)$$
$$= \hat{\phi}(x + \epsilon)$$

（ローレンツ変換）

ローレンツ変換は、$x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}=x^{\mu}+\delta w^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$,　$\phi'(x')=\phi(x)+\delta\phi(x)=\phi(x)+\frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}I^{\mu\nu}\phi(x)$

$\delta w_{\mu\nu}$, $I^{\mu\nu}$ は反対称テンソル

$\Delta x^{\mu}=\delta w^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$　　$\Delta\phi(x)=\frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}I^{\mu\nu}\phi(x)$

$\bar{\delta}\phi(x)=\Delta\phi(x)-\partial_{\mu}\phi(x)\Delta x^{\mu}=\frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}I^{\mu\nu}\phi(x)-\partial_{\mu}\phi(x)\delta w^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$

ポアソン括弧は

$$\begin{aligned}\{G_{\delta},\ \phi\}&=\bar{\delta}\phi\\&=\frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}I^{\mu\nu}\phi(x)-\partial_{\mu}\phi(x)\delta w^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\\&=\frac{1}{2}(\delta w_{\mu\nu}I^{\mu\nu}\phi(x)-\partial_{\mu}\phi(x)\delta w^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}+\partial_{\nu}\phi(x)\delta w^{\mu}{}_{\nu}x^{\mu})\qquad\leftarrow\ \delta w_{\mu\nu}\text{ は反対称}\end{aligned}$$

$G_{\delta}=\frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}Y^{\mu\nu}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\{Y^{\mu\nu},\ \phi\}&=I^{\mu\nu}\phi(x)-\partial^{\mu}\phi(x)x^{\nu}+\partial^{\nu}\phi(x)x^{\mu}\\&=(I^{\mu\nu}-x^{\nu}\partial^{\mu}+x^{\mu}\partial^{\nu})\phi(x)\end{aligned}$$

ポアンカレ群における生成子は平行移動とローレンツ変換のものを足せばいいので

$$G_{\delta}=-\epsilon_{\mu}P^{\mu}+\frac{1}{2}\delta w_{\mu\nu}Y^{\mu\nu}$$

となる。

次のような無限小ローレンツ変換を考えてもよい。

$x^{\mu}\longrightarrow x'^{\mu}=x^{\mu}+\epsilon^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}=x^{\mu}+\frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\nu}-\epsilon^{\nu\mu})x_{\nu}$,　$\phi(x)\longrightarrow\phi'(x')=\phi(x)-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\phi(x)$

$\Delta x^{\mu}=\frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\nu}-\epsilon^{\nu\mu})x_{\nu}$　　$\Delta\phi(x)=-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\phi(x)$

ここで行列 $S_{\mu\nu}$ は、次のように定義される場のスピンである。

$$(S_{\mu\nu})_{i}^{j}\phi_{j}(x)=\begin{cases}0 & (\text{sclar})\\ i(g_{\mu i}\delta_{\nu}^{j}-g_{\nu i}\delta_{\mu}^{j})\phi_{j}(x) & (\text{vector})\\ \frac{i}{4}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu})_{i}^{j}\phi_{j}(x) & (\text{spinor})\end{cases}$$

$\bar{\delta}\phi(x)=\Delta\phi(x)-\phi_{,\mu}(x)\Delta x_{\mu}=-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\phi(x)-\frac{1}{2}\phi_{,\mu}(x)(\epsilon^{\mu\nu}-\epsilon^{\nu\mu})x_{\nu}$

$$\begin{aligned}j^{\mu}\epsilon&=\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\bar{\delta}\phi(x)+L\Delta x^{\mu}\qquad\epsilon=g_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\\&=\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\Big(-\frac{i}{2}\epsilon^{\sigma\nu}S_{\sigma\nu}\phi(x)-\frac{1}{2}\phi_{,\sigma}(x)(\epsilon^{\sigma\nu}-\epsilon^{\nu\sigma})x_{\nu}\Big)+\frac{1}{2}L(\epsilon^{\sigma\nu}-\epsilon^{\nu\sigma})x_{\nu}\\&=-i\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\epsilon^{\sigma\nu}S_{\sigma\nu}\phi(x)-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\sigma}\phi(x)-\delta_{\sigma}{}^{\mu}L\Big)(\epsilon^{\sigma\nu}-\epsilon^{\nu\sigma})x_{\nu}\qquad T_{\nu}{}^{\mu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\nu}\phi-\delta_{\nu}{}^{\mu}L\\&=-\frac{1}{2}\Big(i\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\epsilon^{\sigma\nu}S_{\sigma\nu}\phi(x)+T_{\sigma}{}^{\mu}(\epsilon^{\sigma\nu}-\epsilon^{\nu\sigma})x_{\nu}\Big)\end{aligned}$$

ネーターカレントを次のように置く。

$$Y_{\nu\rho}{}^{\mu}=x_{\nu}T_{\rho}{}^{\mu}-x_{\rho}T_{\nu}{}^{\mu}-i\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}S_{\nu\rho}\phi(x)$$

この $Y_{\nu\rho}{}^{\mu}$ を角運動量密度という。 $Y_{\nu\rho}{}^{\mu}$ は ν,ρ について反対称である。 保存則は

$$\partial_{\mu}Y_{\nu\rho}{}^{\mu}=0$$

であり、角運動量の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$Y_{\nu\rho}=\int d^{3}x\,M_{\nu\rho}{}^{0}$$

は角運動量とブースト演算子となる。