場の理論におけるネーターの定理

ネーターの定理（Noether's theorem）は、系に連続的な対称性がある場合はそれに対応する保存則が存在すると述べる定理である。場の量を扱う場の解析力学や場の量子論においても、対称性は基本的な概念であり、ネーターの定理がしばしば応用される。ネーターの定理によって導かれる保存則に登場するネーターカレントや、ネーターチャージは特に重要な概念になっている。

力学変数として場 $\phi(x)$ を考え、作用積分を

$$S[\phi]=\int_\Omega d^4x\, L(\phi\,,\partial\phi)$$

L はラグランジアン密度。4 次元時空点 x_μ における ϕ と $\phi_{,\mu}$（$=\partial\phi/\partial x_\mu$）の局所的関数であるとする *。

とする。

* ここには、2 つの仮定が含まれている。
①L が ϕ とそれの 1 階の時空間微分 $\phi_{,\mu}$ を含むとしている点で、したがって、それから導かれる波動方程式は時空間について高々、2 階の微分方程式であることを前提にしている。
②もう一つは、L の局所性である。L は当然、場と場の相互作用項をも含むことになるが、この仮定によって相互作用の素過程は局所的にのみ生起すること、したがって遠隔作用は許されず、それは場の媒介による近接作用によっておきかえられなければならない。
ところで、この 2 つの仮定は、次の意味で相互に関連している。すなわち、非局所的相互作用をあえて局所的な形に書き換えようとすると、今度は、場に無限階の時空間微分を持ちこんだ相互作用があらわれる。
いずれにせよ、この仮定は理論の可能性の枠をせばめているわけであるが、しかし、いったんこの枠をはずすと相対性理論や量子力学の諸原理に抵触する困難をひき起こしてしまうことになる。

系が座標と場との微小変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$$

$$\phi(x)\ \to\ \phi'(x')=\phi(x)+\Delta\phi(x) \qquad ①$$

このΔは total change 差分を表す（次の②の説明、Lie 変分参照）。

に対して対称性をもち、この変換の下で作用 S が不変であるとする。

また、$\phi'(x')$ は、$\phi'(x')=\phi'(x)+\Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$ でもある。　②

$\phi'(x)$ は場を少しだけ変形したもの、次の項 $\Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$ は位置を少しだけずらしたときの差分。つまり、場の形の微小変化による差分＋位置の微小ずらしによる差分 $\phi'(x)-\phi(x)+\Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$ が、total change 差分 $\Delta\phi(x)=\phi'(x')-\phi(x)$ となる。

$\Delta\phi$ には場自身の変換だけでなく、座標の変換も含んでいる。 現代的な見方では、場の変分として、同一座標値での差を取ったリー変分 $\bar\delta\phi(x)$ で記述すると都合がよい。

Lie 変分：同一座標点での場の形の変化を Lie 変分と呼び $\bar\delta$ で表す。

$$\bar\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x) \qquad ③ \qquad (\,x' \text{ 地点では、} \bar\delta\phi(x')=\phi'(x')-\phi(x')\,)$$

上の $\phi'(x')$ に関する 2 つの式（①、②）より、

$$\bar\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x)=\phi'(x')-\phi(x)\ -\phi'(x')+\phi'(x)=\Delta\phi(x)-\Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x) \qquad ④$$

すなわち total change 差分 $\Delta\phi(x)$ は、$\Delta\phi(x)=\bar\delta\phi(x)+\Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$ となる。　⑤

ここで使用する記号を次のように整理しておく。

Δ：total change 差分＝ 場の形の微小変化による差分 ＋ 位置の微小ずらしによる差分

$$\Delta\phi(x)=\phi'(x')-\phi(x)=\bar\delta\phi(x)+\Delta x^\mu\,\partial_\mu\phi(x)$$

ただし、Δx の場合は単純に、$\Delta x=x'-x$ とする。

$\bar\delta$：同一座標点での場の形の変化を表す Lie 変分　$\bar\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x)$

また、$\dfrac{\delta L}{\delta\phi}$ を次のように定義しておく。

$$\frac{\delta L}{\delta\phi}\equiv\frac{\partial L}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}$$

場のオイラー・ラグランジュ方程式より、　http://www.yam-web.net/science-note/QM1.pdf　場の正準方程式

$$\frac{\delta L}{\delta\phi}\equiv\frac{\partial L}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0$$

場の理論におけるネーターの定理概要

ネーターカレントは

$$j^\mu = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)}\bar{\delta}\phi_i - \Delta x^\mu L$$

となり、連続の方程式（保存則）

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

を満たす。

特に微小変換が次のようなパラメータの線型結合

$$\Delta x^\mu = \sum_{i=1}^{s} X^{\mu i}\,\delta\omega^i \qquad (\, i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ s) \qquad \text{同じ添え字については和をとる}$$

$$\Delta\phi_A(x) = \sum_{i=1}^{s} \Phi_A{}^i\,\delta\omega^i \quad \Phi_A{}^i \text{ は } \{\,\phi_B(x)\,\} \text{ の組の関数} \quad \bar{\delta}\phi_A(x) = \Delta\phi_A(x) - \phi_{,\mu}(x)\,\Delta x_\mu = \Phi_A{}^i\,\delta\omega^i - \phi_{,\mu}(x)\,X^{\mu i}\,\delta\omega^i$$

で書かれている場合には、ネーターカレントはパラメータの成分毎に

$$J^{\mu i} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}(\phi_{,\sigma}(x)\,X^{\sigma i} - \Phi_A{}^i) - L\,X^{\mu i}$$

と書くことができて、それぞれに連続の方程式（保存則）

$$\partial_\mu J^{\mu i} = 0$$

を満たす。

つぎのような記述（$\bar{\delta}\phi$ での記述）の場合も同じ内容となる。

$$\Delta x^\mu = \epsilon^i X^{i\mu}(x)$$

$$\bar{\delta}\phi_A(x) = \epsilon^i\,\Gamma^i\phi_A(x) \qquad \Delta\phi_A(x) = \bar{\delta}\phi_A(x) + \phi_{,\mu}(x)\,\Delta x_\mu = \epsilon^i\,\Gamma^i\phi_A(x) + \epsilon^i\,\phi_{,\mu}(x)\,X^{i\mu}(x)$$

このとき、ネーターカレントは

$$j^{i\mu} \equiv -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_A)}\,\Gamma^i\phi_A - L\,X^{i\mu}$$

となり、

$$\partial_\mu j^{i\mu} = 0$$

を満たす。

ネーターカレントの時間成分を空間積分した

$$Q^i \equiv \int d^3x\, j^{i0}$$

はネーターチャージと呼ばれる。 これは微小変換の生成子 (無限小生成作用素)

$$[\, i\,Q^i,\, \phi_A(x)\,] = \Gamma^i\,\phi_A(x)$$

となる。

ネーターの定理　導出その１

まず場の変化を x' での Lie 変分で書き表す。すなわち $\phi'(x') = \phi(x') + \bar{\delta}\phi(x')$ 等々。

すると、微小量の一次のオーダーまでとって

$$S' = \int d^4x'\, L(\phi'(x'),\ \partial_\mu\phi'(x'))$$

$$= \underbrace{\int d^4x'\, L(\phi(x'),\ \partial_\mu\phi(x'))}_{\text{位置の変化}} + \underbrace{\int d^4x\,(\frac{\partial L}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\bar{\delta}\phi)}_{\text{場の形の変化}} \qquad \frac{\partial L}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\bar{\delta}\phi = \bar{\delta}L$$

第１項を x での表式に書き換えると、

$$\int d^4x'\, L(x') = \int d^4x \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| L(x') \qquad d^4x' = d^4x\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$$ *http://www.yam-web.net/science-note/PM.pdf*　ヤコビアン

$$= \int d^4x\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|(\, L(x) + \Delta x^\mu\,\partial_\mu L\,)$$

ヤコビアンは次のように計算される。行列 M を $M^{\nu}{}_{\mu} \equiv \partial_\mu \Delta x^{\nu} = \partial_\mu (x'^{\nu} - x^{\nu})$ と定義すると、

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = det|1 + M| = exp Tr ln(1+M) \simeq exp Tr M \simeq 1 + \partial_\mu \Delta x^{\mu}$$

$det(e^{A}) = e^{TrA}$ より、 http://www.yam-web.net/science-note/PM.pdf「よくつかう記号 / 行列（公式）」

$det|1 + M| = exp Tr ln(1+M)$

$ln(1+M) = M - M^2/2 + M^3/3 - \cdots\cdots \simeq M$

$exp(TrM) = exp(\partial_\mu \Delta x^{\mu}) = 1 + \partial_\mu \Delta x^{\mu} + \cdots\cdots \simeq 1 + \partial_\mu \Delta x^{\mu}$

$\therefore\ d^4x' = d^4x\,(1 + \partial_\mu \Delta x^{\mu})$

$$S' = \int d^4x \{ (1 + \partial_\rho \Delta x^{\rho})(L + \Delta x^{\mu}\partial_\mu L) + \frac{\partial L}{\partial \phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \bar{\delta}\phi \}$$ 　この一次近似は、

$$= \int d^4x \{ L + (\partial_\mu \Delta x^{\mu}) L + \Delta x^{\mu}\partial_\mu L + \frac{\partial L}{\partial \phi}\bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \bar{\delta}\phi \}$$

$$= \int d^4x \{ L + \partial_\mu(\Delta x^{\mu} L) + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi) \} \quad \leftarrow \quad \frac{\delta L}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}$$

$$= \int d^4x \{ L + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \Delta x^{\mu} L) \}$$

$$\Delta S = S' - S = \int d^4x \{ \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi + \partial_\mu(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \Delta x^{\mu} L) \} \quad \leftarrow \quad \int d^4x\, L = S$$

$$= \int d^4x \{ \partial_\mu j^{\mu} + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi \}$$

ここで j^{μ} は、$j^{\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi + \Delta x^{\mu} L$ （$j^{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}\bar{\delta}\phi - \Delta x^{\mu} L$ とおいてもよい。）

$$\partial_\mu j^{\mu} + \frac{\delta L}{\delta \phi}\bar{\delta}\phi = 0$$

場の運動方程式 $\frac{\delta L}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$ より、

$$\partial_\mu j^{\mu} = 0$$

ネーターの定理　導出その 2

連続変換をあつかう場合、変換の性質をみるには、パラメーターの無限小変化に対応する無限小変換を考察すれば十分であることが知られている。

いま、無限小変換が s 個の独立な無限小パラメーター $\delta\omega_i$（$i = 1, 2, \cdots\cdots, s$）でひきおこされているとする。

1）まず、座標変換 $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \Delta x_\mu$ については、

$\Delta x_\mu = \sum_{i=1}^{s} X_{\mu i}\,\delta\omega_i$ とあらわせる。ここに、$X_{\mu i(x)}$ は一般に x の関数である。

2）一方、場の量 $\phi_A(x)$ は、$\phi'_A(x')$ に変換されるが、それは $\delta\omega_i$ によってつぎのように結ばれる。

$\phi_A(x) \rightarrow \phi'_A(x') = \phi_A(x) + \Delta\phi_A(x)$

$\Delta\phi_A(x) = \sum_{i=1}^{s} \Phi_{A i}\,\delta\omega_i$ 　　$\Phi_{A i}$ は一般に $\{ \phi_B(x) \}$ の組の関数である。

$\Delta\phi$ と $\bar{\delta}\phi$ のちがい：　$\Delta\phi(x) = \bar{\delta}\phi(x) + \phi_{,\mu}(x)\,\Delta x_\mu$ 　⑤参照

作用 $S = \int d^4x\, L(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$ の変化を求める。

$$\Delta S = \int d^4x'\, L(\phi'(x'), \partial_\mu\phi'(x')) - \int d^4x\, L(\phi(x), \partial_\mu\phi(x))$$

ここで、$\int d^4x\, L(\phi'(x'), \partial_\mu\phi'(x'))$ を左項から引き、右項には加える。

$$= \int d^4x\, L \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\mu} + \int d^4x\, \Delta L$$

第 1 項は $L(\phi'(x'), \partial_\mu\phi'(x')) = L(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) + \Delta L$ なのだが、$\frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\mu}$ との微小積の 1 次近似をとった形で ΔL は消えている。

ただし、$d^4x' - d^4x = \prod_\mu (dx_\mu + d\Delta x_\mu) - d^4x = \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\mu} d^4x$ を用いた。（1 次近似をとればよい）

第２項 は、$\Delta L = \bar{\delta} L + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \Delta x_\mu$　　⑤参照

$$= \int d^4x\, L \frac{\partial \Delta x_\mu}{\partial x_\mu} + \int d^4x (\bar{\delta} L + \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \Delta x_\mu)$$

$$= \int d^4x \{ \bar{\delta} L + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (L \Delta x_\mu) \}$$

第 *1* 項目は、Euler の方程式が成りたつので、

$$\bar{\delta} L = \frac{\partial L}{\partial \phi} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \bar{\delta}\phi$$　　「導出その１」参照

$$= \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \bar{\delta}\phi$$　　← Euler の方程式 $\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \bar{\delta}\phi)$$

$$= \int d^4x \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \bar{\delta}\phi + L \Delta x_\mu)$$

$$= -\int d^4x \frac{\partial}{\partial x_\mu} (J_{\mu i}\, \delta\omega_i)$$　　$i = 1, 2, \cdots\cdots, s$　　i の和をとる

ただし、$J_{\mu i} = \frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} (\phi_{,\sigma}(x) X_{\sigma i} - \Phi_{A i}) - L X_{\mu i}$

$$\bar{\delta}\phi(x) = \Delta\phi(x) - \phi_{,\mu}(x) \Delta x_\mu \qquad \Delta\phi_A(x) = \Phi_{A i}\, \delta\omega_i \qquad \Delta x_\mu = X_{\mu i}\, \delta\omega_i$$

さて、系が $\delta\omega_i$ の無限小変換の下で不変であるためには、全時空間にわたって、

$$\frac{\partial J_{\mu i}(x)}{\partial x_\mu} = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, s$$　　Noether の定理

であることが要請される。

ネーターチャージ

ネーターカレントの時間成分を空間積分した

$$G \equiv \int d^3x\, j^0$$

をネーターチャージと呼ぶ。

$\partial_\mu j^\mu = 0$ より、

$$\int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x^\mu} j^\mu = 0$$

$$= \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} j^0 + \int_V d^3x \nabla \cdot \boldsymbol{j}$$

$$= \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} j^0 + \oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}$$　　←　ガウスの発散定理

閉空間の表面では流れはないと考えた場合、第２項は *0* である。すると、第１項の時間成分が残り、

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_{閉空間} d^3x\, j^0 = 0 \quad \rightarrow \quad G = \int_{閉空間} d^3x\, j^0 = C$$（定数）

つまり、このときはネーターチャージ G は時間に依存しない定数 C となり、保存量となる。

ネーターチャージ（空間中に蓄えられた物理的な量）は閉空間では時間的に一定ということになる。

この保存量 G は、ラグランジアン密度を不変にする変換の生成子と呼ばれるものである。G と ϕ のポアソン括弧を計算してみると、

ϕ の形の変化のみの簡単な場合をとりあげる。 $j^\mu = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Gamma\phi$

$$\{A, B\} = \int d^3x (\frac{\partial A}{\partial \phi} \frac{\partial B}{\partial \pi} - \frac{\partial A}{\partial \pi} \frac{\partial B}{\partial \phi}) \qquad \frac{\partial \phi(x)}{\partial \phi(x')} = \delta(x - x') \qquad \int f(x) \delta(x - x') dx = f(x') \quad etc.$$

http://www.yam-web.net/science-note/QM1.pdf 「量子力学 / Ⅱ場の量子論 / 場の正準方程式」参照

$$G=\int_V d^3x j^0=\int_V d^3x(-\frac{\partial L}{\partial(\partial_0\phi)}\Gamma\phi)=\int_V d^3x(-\pi\Gamma\phi) \qquad \pi=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}$$

$$\{G,\ \phi\}=\int d^3x(\frac{\partial G}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\pi}-\frac{\partial G}{\partial\pi}\frac{\partial\phi}{\partial\phi})=-\frac{\partial G}{\partial\pi}=\Gamma\phi$$

http://www.yam-web.net/science-note/AM.pdf 「ハミルトン力学 / ポアソン括弧式」 $\epsilon\{A, G\}=\delta A$
「解析力学におけるネーターの定理」導出 1 $\{q_i, \epsilon G\}=\epsilon Q_i=\delta q_i$

演算子の表現では、

$$[i\hat G,\ \hat\phi]=\Gamma\hat\phi$$

このように、G はポアソン括弧によって場の変化分を作り出すので生成子と呼ばれる。また、何かの対称性があったとき、それに対応して G が現れるので、それをその対称性による群の生成子と呼ぶ。
対称性に伴う保存量は群論で言うところの生成子に対応する。

---

https://ja.wikipedia.org/wiki/ ネーターの定理

場の理論における例（添え字がこれまでとは入れ替わっている部分がありますが、適宜読みかえてください。）

時空の並進対称性

座標変換において、無限小の平行移動を考える。

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu=x^\mu+\epsilon^\mu$$

（$\delta x^\mu=\epsilon^\mu$ である。）これに付随する場の無限小変換は

$$\phi_i(x)\longrightarrow\phi_i'(x')=\phi_i(x)$$

であり、ネーターカレントは

$$T_\nu^{\ \mu}=\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\nu\phi_i-\delta_\nu^\mu L \qquad \delta_\nu^{\ \mu}\text{ はクロネッカーのデルタ}$$

となる。この $T_\nu^{\ \mu}$ はエネルギー・運動量テンソルである。 保存則は

$$\partial_\mu T_\nu^{\ \mu}=0$$

であり、エネルギーと運動量の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$P_\nu=\int d^3x\, T_\nu^{\ 0}$$

はエネルギー並びに運動量であり、時空の併進の生成子

$$[P_\mu, \phi_i(x)]=i\,\partial_\mu\phi_i(x)$$

となる。

ローレンツ変換

無限小ローレンツ変換

$$x^\mu\longrightarrow x'^\mu=x^\mu+\epsilon^\mu{}_\nu x^\nu=x^\mu+\frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\nu}-\epsilon^{\nu\mu})x_\nu$$

を考える。これに付随する場の無限小変換は

$$\phi_i(x)\longrightarrow\phi_i'(x')=\phi_i(x)-\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu}(S_{\mu\nu})_i^{\ j}\phi_j(x)$$

を考える。ここで、行列 $S_{\mu\nu}$ は

$$(S_{\mu\nu})_i^{\ j}=\begin{cases}0 & (sclar)\\ i(g_{\mu i}\delta_\nu^{\ j}-g_{\nu i}\delta_\mu^{\ j}) & (vector)\\ \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu-\gamma_\nu\gamma_\mu)_i^{\ j} & (spinor)\end{cases}$$

で定義される場のスピンである。 γ_μ はガンマ行列である。
このとき、ネーターカレントは

$$M_{\nu\rho}{}^{\mu}=x_\nu T_\rho^{\ \mu}-x_\rho T_\nu^{\ \mu}-i\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}(S_{\nu\rho})_i^{\ j}\phi_j$$

となる。この $M_{\nu\rho}{}^{\mu}$ を角運動量密度という。 $M_{\nu\rho}{}^{\mu}$ は ν, ρ について反対称である。 保存則は

$$\partial_\mu M_{\nu\rho}{}^{\mu} = 0$$

であり、角運動量の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$M_{\nu\rho} = \int d^3x\, M_{\nu\rho}{}^{0}$$

は角運動量とブースト演算子となる。

位相変換

複素場を考えて場の位相を変える変換を考える。

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi_i(x) - i\, e\, \epsilon\, \phi_i(x)\,, \quad \bar{\phi}_i(x) \longrightarrow \bar{\phi}_i(x) + i\, e\, \epsilon\, \bar{\phi}_i(x)$$

このとき、ネーターカレントは

$$j^{\mu} = i\, e \left(\bar{\phi}_i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \bar{\phi}_i)} - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \phi_i \right)$$

となる。これは 4 元電流密度である。保存則は

$$\partial_\mu j^{\mu} = 0$$

であり、電荷の保存則を表している。 対応するネーターチャージ

$$Q = \int d^3x\, j^0$$

は電荷である。