重力場のゲージ理論（「一般ゲージ場論序説」岩波　内山龍雄著　―より）

相対論の接続 $\Gamma^i{}_{jk}$ をゲージ理論の立場から考察してみよう。
方針は、大域的変換である Lorentz 変換 $a^k{}_l$ を局所変換 $a^k{}_l(x)$ に置き換え、それでもなお作用 I を不変に保つためには何を導入すべきかということになる。

任意の点 P には、X^k と x^μ という 2 つの座標が与えられているとする。

X^k　Lorentz 座標（添え字はラテン文字で表す）

x^μ　曲線座標（添え字はギリシャ文字で表す）

$X = X(x)$

$$h^k{}_\mu(x) \equiv \frac{\partial X^k(x)}{\partial x^\mu}\ ,\quad h^\mu{}_k \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial X^k} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial h^k{}_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial h^k{}_\nu}{\partial x^\mu} \qquad (2)$$

曲線座標系の成分（ギリシャ添字）を Lorentz 系の成分（ラテン添字）に、あるいはその逆の転換をするには、$h^k{}_\mu$ や $h^\mu{}_k$ を用いればよい。例えば、

$$V^k h^\mu{}_k \equiv V^\mu\ ,\quad h^k{}_\mu \frac{\partial}{\partial X^k} V^l(X) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^l\{X(x)\}$$

不変距離 ds

$$ds^2 = \eta_{kl}\, dX^k dX^l = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu \qquad \eta_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad g_{\mu\nu}(x) \text{ は対称}$$

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{kl}\, h^k{}_\mu h^l{}_\nu \qquad (3)$$

$$h^\mu{}_k h^\nu{}_l\, g_{\mu\nu} = \eta_{kl} \qquad (3)'$$

$$g_{\mu\nu}\, h^\nu{}_l\, \eta^{lk} = h^k{}_\mu \qquad (3)''$$

一般に、ラテン字およびギリシャ字の添字の上げ下げには、それぞれ η^{kl}, η_{kl} および $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ を掛ければよい。

Lorentz 変換

$$X^k \to X'^k = a^k{}_l X^l \qquad (4)$$

$$h'^k{}_\mu = a^k{}_l h^l{}_\mu\ ,\quad h'^\mu{}_k = h^\mu{}_l (a^{-1})^l{}_k \qquad (5)\ *$$

$$*\quad h^k{}_\mu = \frac{\partial X^k}{\partial x^\mu} \ \to\ h'^k{}_\mu = \frac{\partial(a^k{}_l X^k)}{\partial x^\mu} = a^k{}_l \frac{\partial X^k}{\partial x^\mu} = a^k{}_l h^l{}_\mu$$

$$h'^\mu{}_k = (h'^k{}_\mu)^{-1} = (a^k{}_l h^l{}_\mu)^{-1} = h^\mu{}_l (a^{-1})^l{}_k$$

ベクトル場 ψ_A　$(A = 1, \cdots\cdots, N)$

X - 系の Lorentz 変換 (4) により、無限小変換で、次のように変換されるとする。

$$\psi'_A = \boldsymbol{T}(a)_A{}^B \cdot \psi_B = \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\boldsymbol{G}_{ij}\right)_A{}^B \cdot \psi_B \qquad \epsilon^{ij} \text{ は小さな値} \qquad \epsilon^{ij} = -\epsilon^{ji} \qquad (6)$$

ここで、$\boldsymbol{G}_{ij}\ (= -\boldsymbol{G}_{ji})$ は Lorentz 群の 6 個の生成元を表わす N 次の表現行列。4 次の表現では、

$$\boldsymbol{G}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{G}_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

他の成分は $\boldsymbol{G}_{ij} = -\ \boldsymbol{G}_{ji}$（$\boldsymbol{G}_{00} = 0, \cdots, \boldsymbol{G}_{33} = 0$）で定義される。本来 6 個の線形結合でよいのだが、計算表現をすっきりさせるため 16 個にしてある。したがって、この $i\,j$ は行列要素を表すものではなく、16 個の識別符号にすぎない。重複を考慮して $1/2$ がついている。詳しくは、「ローレンツ群とスピノル / ローレンツ群のリー代数」参照　http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science010.pdf#zoom=160&page=2

ψ_A 場の作用積分 I（これは Lorentz 不変と仮定する）

$$I = \int L(\,\psi_A\,, \frac{\partial \psi_A}{\partial X^k}\,)\, d^4X \qquad (7)$$

ここで ψ_A に含まれる X を $X^k(x)$ とみなすことにより、ψ_A を x の関数 $\psi_A(x)$ と書くと、

$$I = \int L'(\,\psi_A(x)\,, \frac{\partial \psi_A}{\partial x^\mu}\,, h^k{}_\mu\,)\, d^4x \qquad (7)'$$

$$= \int L \cdot \frac{\partial(X^0 \cdots X^3)}{\partial(x^0 \cdots x^3)}\, d^4x \qquad \frac{\partial(X^0 \cdots X^3)}{\partial(x^0 \cdots x^3)} \equiv \left| \frac{\partial X^k}{\partial x^\mu} \right| = det(h^k{}_\mu)$$

となる。（「相対性理論 / リーマン時空での積分」参照　http://www.yam-web.net/science-note/RT.pdf#page=32&zoom=160 ）

大域的変換 → 局所的変換への置き換え

ゲージ理論の一般的方法にしたがって、Lorentz 変換のパラメーター ϵ^{ij} を $\xi^{ij}(x)\ (= -\xi^{ji}(x)\,)$ に置き換える。

この置き換え後も、物理系が局所的 Lorentz 変換に対して不変であるためには、$\partial_\mu \psi_A$ を

$$\mathrm{D}_\mu \psi_A(x) \equiv \{\,(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \cdot \boldsymbol{G}_{ij}\,)\,\psi\,\}_A \qquad \text{共変微分} \qquad (8)$$

に置き換えなければならない。ここで $A^{ij}{}_\mu(x)\ (= -A^{ji}{}_\mu\,)$ はゲージ場である。

「ゲージ理論とリー代数 / 共変微分」参照　http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science007.pdf#zoom=160&page=2
「ゲージ理論 /SU(N) ゲージ理論（非可換ゲージ理論）」参照　http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science004.pdf#zoom=160&page=3

大域的である Lorentz 変換を局所的変換に置き換えることに伴い、(2) は不成立となる。そこで、(1) を満足するような $X^k(x)$ という座標系を時空全域にわたって設置できるという前提も、これからは放棄しなければならない。

そこでこれからは、$h^k{}_\mu\ \ (k = 0, \cdots, 3)$ は x - 系を基準にした場合、4 個の共変ベクトル場とみなす。これを局所 Lorentz 系の局所的座標軸（Tetrad）とよぶことにする。

X - 系の存在を前提から除外した現在は、時空点の座標は x^μ で表す。また距離は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad (9)$$

としなければならない。この $g_{\mu\nu}$ は (3) で与えられるものである。

なお $h^\mu{}_k(x)$ を $h^k{}_\mu(x)$ の逆行列として定義すれば、(1)、(2) という定義や関係式がなくても、いままで述べたことはすべて成立する。

そこで ψ_A 系の作用積分 I は、(7)′ の中の $\partial_\mu \psi_A$ を単に $\mathrm{D}_\mu \psi_A$ に置き換えればよい。

$$I' = \int L'(\,\psi_A\,, \mathrm{D}_\mu \psi_A\,, h^k{}_\mu(x)\,)\, d^4x \qquad (7)''$$

$A^{ij}{}_\mu$ の変換則

共変微分 (8) が x - 変換に対して、添え字 μ の示すような共変ベクトルとして変換されるためには A は

$$A'^{ij}{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\, A^{ij}{}_\nu(x) \qquad (10)$$

のように変換されなければならない。

一方、局所的 Lorentz 変換に対しては、一般論に従い $A^{ij}{}_\mu$ は次のように変換される。

$$\boldsymbol{A}_\mu(x) \equiv \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu(x) \cdot \boldsymbol{G}_{ij} \ \text{とおけば、} \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{A}'_\mu(x) \equiv \frac{1}{2} A'^{ij}{}_\mu(x)\, \boldsymbol{G}_{ij} \equiv \boldsymbol{T} \boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \qquad (12)$$

上と同じ箇所を参照

ここで N 次の正方行列 $\boldsymbol{T}$ は、(6) のパラメーター $a^k{}_l$ を $a^k{}_l(x)$ に置き換えたものである。

$A^{ij}{}_\mu$ と相対性理論の接続 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ との関係

ψ_A として通常の 4 次ベクトル V_k を例にとる。

局所 Lorentz 系から見た場合、V_k の共変微分は、Lorentz 変換に対する V_k の変換性と一般公式 (8) から

$$\mathrm{D}_\mu V_k = \partial_\mu V_k + (\boldsymbol{A}_k{}^l)_\mu V_l \qquad \leftarrow \quad (11)\ (\boldsymbol{A}_k{}^l)_\mu = \frac{1}{2} A^{ij}{}_\mu \cdot \boldsymbol{G}_{ij} \qquad \boldsymbol{A}_\mu \text{ は 4 次の行列} \qquad ij \text{ は 16 個の標識}$$

である。

以降、$(\boldsymbol{A}_k{}^l)_\mu$ を $A_k{}^l{}_\mu$ と書くことにする。*

$$\mathrm{D}_\mu V_k = \partial_\mu V_k + A_k{}^l{}_\mu V_l \qquad (13)$$

---

* $A^{kl}{}_\mu$ や $A_{kl\mu}$ は k, l について反対称となる。　$A^{kl}{}_\mu = -A^{lk}{}_\mu$, $A_{kl\mu} = -A_{lk\mu}$ 　また、$A_k{}^l{}_\mu = -A^l{}_{k\mu}$
なぜなら添え字の上げ下げを考えたとき、その基底の $\boldsymbol{G}_{ij}$ に対して計量 η を作用させたものは反対称となるからである。($\boldsymbol{G}_{ij}$ や η の具体的な形を参照)

(13) を x - 系から眺めた場合の形式に書き換えるには、$h^k{}_\nu$ をかければよい(X - 系から x - 系への変換)。

$$h^k{}_\nu \mathrm{D}_\mu V_k = h^k{}_\nu \partial_\mu V_k + h^k{}_\nu A_k{}^l{}_\mu V_l = \partial_\mu V_\nu - \partial_\mu h^k{}_\nu V_k + h^k{}_\nu A_k{}^l{}_\mu V_l$$

$V_\nu = V_k h^k{}_\nu$ (X - 系から x - 系への変換)
$\partial_\mu V_\nu = \partial_\mu (V_k h^k{}_\nu) = \partial_\mu V_k \cdot h^k{}_\nu + V_k \partial_\mu h^k{}_\nu$ より
$h^k{}_\nu \partial_\mu V_k = \partial_\mu V_\nu - \partial_\mu h^k{}_\nu \cdot V_k$

次のように書き換える。

$$h^k{}_\nu \mathrm{D}_\mu V_k = \partial_\mu V_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu} V_\lambda \qquad (14)$$

ここで、$S^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv h^\lambda{}_k \partial_\mu h^k{}_\nu - A^{kl}{}_\mu h_{k\nu} h^\lambda{}_l \qquad (15)$

$S^\lambda{}_{\mu\nu} V_\lambda = h^\lambda{}_k \partial_\mu h^k{}_\nu V_\lambda - A^{kl}{}_\mu h_{k\nu} h^\lambda{}_l V_\lambda$　　$h^\lambda{}_k$ で添字の転換
$= \partial_\mu h^k{}_\nu V_k - A^{kl}{}_\mu h_{k\nu} V_l$
$= \partial_\mu h^k{}_\nu V_k - h^k{}_\nu A_k{}^l{}_\mu V_l$

(14) の左辺は x - 系の一般座標変換($x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x)$)に対して 2 階の共変テンソルである。したがってこの右辺は V_ν の共変微分とみなすことができる。そのときは、$S^\lambda{}_{\mu\nu}$ は接続係数の役目をはたす。事実、(15) の右辺が一般座標変換(x - 変換)に対して、$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ とまったく同じふるまいをすることがわかる。つまり、(14) の右辺は V_ν の共変微分といえる。

こうして

$$\mathrm{D}_\mu V_\nu \equiv \partial_\mu V_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu} V_\lambda \qquad (14)'$$

という定義に到達する。

(「相対性理論 / 一般相対性理論　共変微分」参照　http://www.yam-web.net/science-note/RT.pdf#page=23&zoom=160)

(15) は次のように書きかえることもできる。

$$\partial_\mu h^k{}_\nu - A_l{}^k{}_\mu h^l{}_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu} h^k{}_\lambda = 0 \qquad (16)$$

あるいは、$\partial_\mu h^k{}_\nu + A^k{}_{l\mu} h^l{}_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu} h^k{}_\lambda = 0$

(15) $S^\lambda{}_{\mu\nu} \equiv h^\lambda{}_m \partial_\mu h^m{}_\nu - A^{ml}{}_\mu h_{m\nu} h^\lambda{}_l$
$h^\lambda{}_m \partial_\mu h^m{}_\nu - A^{ml}{}_\mu h_{m\nu} h^\lambda{}_l - S^\lambda{}_{\mu\nu} = 0$
$h^\lambda{}_m \partial_\mu h^m{}_\nu h^k{}_\lambda - A^{ml}{}_\mu h_{m\nu} h^\lambda{}_l h^k{}_\lambda - S^\lambda{}_{\mu\nu} h^k{}_\lambda = 0$
第 1 項　$h^\lambda{}_m \partial_\mu h^m{}_\nu h^k{}_\lambda = \partial_\mu h^k{}_\nu$　　$\leftarrow h^\lambda{}_m h^k{}_\lambda = \delta_m{}^k$
第 2 項　$-A^{ml}{}_\mu h_{m\nu} h^\lambda{}_l h^k{}_\lambda = -A_\nu{}^\lambda{}_\mu h^k{}_\lambda = -A_\nu{}^k{}_\mu = -A_l{}^k{}_\mu h^l{}_\nu$

これは $\partial_\mu h^k{}_\nu$ を 2 種の接続係数(あるいはゲージ場)A と S を用いて書きあらわした式である。4×16 個の独立成分をもつ $\partial_\mu h^k{}_\nu$ をあらわすには、4 × 6 個の $A^{kl}{}_\mu$ のほかにさらに、S が 4×10 個の独立成分をもてば十分である。

そこで

$$S^\lambda{}_{\mu\nu} = S^\lambda{}_{\nu\mu} \qquad (17)$$

とする。

ここで $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ を計算する。(3) と (16) を使うと、

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = S^\rho{}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + S^\rho{}_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}$$

(3) $g_{\mu\nu} = \eta_{kl} h^k{}_\mu h^l{}_\nu = h^k{}_\mu h_{k\nu}$　　(16) $\partial_\mu h^k{}_\nu = A_l{}^k{}_\mu h^l{}_\nu + S^\lambda{}_{\mu\nu} h^k{}_\lambda$
$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda (\eta_{kl} h^k{}_\mu h^l{}_\nu)$　　η_{kl} は定数

$$
\begin{aligned}
&= \eta_{kl}\,\partial_\lambda(h^k{}_\mu\, h^l{}_\nu) \\
&= \partial_\lambda(h^k{}_\mu)\, h_{k\nu} + h_{l\mu}\,\partial_\lambda h^l{}_\nu \\
&= (A_l{}^k{}_\lambda\, h^l{}_\mu + S^\rho{}_{\lambda\mu}\, h^k{}_\rho)\, h_{k\nu} + h_{l\mu}\,(A_k{}^l{}_\lambda\, h^k{}_\nu + S^\rho{}_{\lambda\nu}\, h^l{}_\rho) \\
&= A_l{}^k{}_\lambda\, h^l{}_\mu\, h_{k\nu} + A_k{}^l{}_\lambda\, h_{l\mu}\, h^k{}_\nu + S^\rho{}_{\lambda\mu}\, h^k{}_\rho\, h_{k\nu} + S^\rho{}_{\lambda\nu}\, h_{l\mu}\, h^l{}_\rho \qquad \leftarrow\ A_{lk\lambda} = -A_{kl\lambda}\ \text{および (3)}\ g_{\mu\nu} = h^k{}_\mu\, h_{k\nu} \\
&= S^\rho{}_{\lambda\mu}\, g_{\rho\nu} + S^\rho{}_{\lambda\nu}\, g_{\mu\rho}
\end{aligned}
$$

となる。この関係式と (17) から、ここで導入されたゲージ場 $S^\lambda{}_{\mu\nu}$ は $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ とまったく同一のものであることがわかる。

（「相対性理論 / 一般相対性理論　準備（クリストッフェル記号）④式」参照　http://www.yam-web.net/science-note/RT.pdf#page=20&zoom=160）