ローレンツ群とスピノル

マクスウェル方程式の形を不変に保つローレンツ変換の集合が、1 つの群を構成していることを指摘したのはポアンカレであった。それはアインシュタインの特殊相対性理論の論文が出た 1905 年とほぼ同時期であった。しかしローレンツ群の数学的な研究は、ディラックが電子に対する相対論的波動方程式を提唱した 1928 年以降に盛んになった。そしてそれはポアンカレ群の研究へと発展し、現在の素粒子論の基礎をなしている。

「物理のためのリー群とリー代数」窪田 高弘著より

1、特殊相対性理論

特殊相対性理論は、物理法則がすべての慣性系で同じ形をとるという特殊相対性原理と、真空中の光速 c がどの慣性系からみても一定であるという光速度不変の原理から構成される。

このもとでは、2 つの慣性系の間で

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 一定 \qquad (1\text{-}1)$$

となる。

通常、$x^0 := ct,\ x^1 := x,\ x^2 := y,\ x^3 := z$ とおく。

K' 系が K 系に対して x 軸方向に速度 v で運動している時を考える。

$y = y',\ z = z'$ なので、$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2$

この関係式を満たすローレンツ変換は次の通りである。

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ここで $\beta := v/c$ である。

速度ベクトルの成分を $u_i := cdx^i/dx^0$ と定義すると

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2},\ u'_y = u_y,\ u'_z = u_z$$

更に、運動量ベクトル $\mathbf{p}$ とエネルギー E を $\mathbf{p} := \dfrac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$E := \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ と定義すると、

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-\beta^2}},\ p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

となる。こうして、$(E/c, p_x, p_y, p_z)$ が (ct, x, y, z) と同じ変換をすることがわかる。

2、ローレンツ群

時空点が座標 (x^0, x^1, x^2, x^3) で与えられる空間をミンコフスキー空間という。

ミンコフスキー空間の内積は $<x, y> = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$ で与えられ、　$<x, y> = x^i g_{ij} y^j = (x, gy)$

計量テンソルは $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられる。

$g_{\mu\nu}$ の逆テンソル $g^{\mu\nu}$ も同じ行列となる。（$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho$）

これを用いると、(1-1) の関係式は次のように書ける。

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu =: <x, x> = 一定 \qquad (2\text{-}1)$$ （上添字の x^μ は反変ベクトル、下添字の x_μ（$= g_{\mu\nu} x^\nu$）は共変ベクトル）

x^μ の線形変換 $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ で、ノルム $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$ を不変に保つ変換 Λ をローレンツ変換と呼ぶ。

この変換の全体はローレンツ群 $\mathbf{O}(3,1)$ をなす。ミンコフスキー空間における内積を不変にする 1 次変換の行列 Λ（$x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$）は、

$$\Lambda^T g \Lambda = g \qquad (2\text{-}2)$$ ⟵　$<x, y> = \mathbf{x}^T g\, \mathbf{y}$ と $<\Lambda x, \Lambda y> = (\Lambda \mathbf{x})^T g\, \Lambda \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \Lambda^T g\, \Lambda\, \mathbf{y}$ の比較より $\Lambda^T g \Lambda = g$

を満足する正則行列（$|\Lambda| \neq 0$　逆行列を持つ正方行列）である。（ローレンツ変換行列であるための条件）

これを行列成分で書くと、

$$\Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho g_{\mu\nu} = g_{\lambda\rho} \qquad (2\text{-}3)$$

これら正則行列の全体がローレンツ群を形成する。ローレンツ群のこの定義から明らかなように、3 次元空間の

回転群はローレンツ群の部分群である。

$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$　　ノルム $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu$ 不変

$\Lambda^\mu{}_\lambda \Lambda^\nu{}_\rho g_{\mu\nu} = g_{\lambda\rho}$　　$\leftarrow$　$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\lambda x^\lambda \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho \iff g_{\lambda\rho} x^\lambda x^\rho$

この両辺に $g^{\lambda\tau}$ を掛けると、$\Lambda_\nu{}^\tau \Lambda^\nu{}_\rho = \delta^\tau{}_\rho$　（$\Lambda_\nu{}^\tau = g^{\lambda\tau} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\lambda$　上下添字を下上に移動）　$\to$　$\Lambda_\nu{}^\tau \Lambda^\nu{}_\tau = 1$

$\therefore\ \Lambda_\nu{}^\tau = (\Lambda^{-1})^\tau{}_\nu$　　$\Lambda_\nu{}^\tau$ はもとの行列 Λ の転置逆行列 $(\Lambda^{-1})^T$ になっている

この $\Lambda_\nu{}^\tau = g^{\lambda\tau} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\lambda$ を使って、共変ベクトル x_μ のローレンツ変換は、$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\tau x_\tau$

ミンコフスキー空間のベクトルの分類

ミンコフスキー計量における内積は正定値ではなく、その正負によってミンコフスキー空間のベクトルは次のように分類される。

$\langle x, x\rangle > 0$　　時間的 (time − like)

$\langle x, x\rangle < 0$　　空間的 (space − like)

$\langle x, x\rangle = 0$　　光的 (light − like)

ここで、$\Lambda^T g \Lambda = g$ (2-2) の行列式をとると

$(\det\Lambda)^2 = 1$　　(2-4)　　$\longleftarrow$　$|\Lambda^T| = |\Lambda|$

が得られる。従って、ローレンツ変換は次の 2 つのタイプの大別ができる。

$L_+ : \{\Lambda;\ \Lambda^T g \Lambda = g,\ \det\Lambda = 1\}$

$L_- : \{\Lambda;\ \Lambda^T g \Lambda = g,\ \det\Lambda = -1\}$

L_+ は特殊ローレンツ群 $\mathbf{SO}(3,1)$ である。

さらに、(2-3) より（$g_{\mu\nu}$ は対角成分以外はゼロなので）、$\Lambda^0{}_\mu \Lambda^0{}_\nu - \Lambda^1{}_\mu \Lambda^1{}_\nu - \Lambda^2{}_\mu \Lambda^2{}_\nu - \Lambda^3{}_\mu \Lambda^3{}_\nu = g_{\mu\nu}$

$\mu = \nu = 0$ とおくと、$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2$

これから、$\Lambda^0{}_0 \geq 1$ か $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ であることが分かる。前者は時間の順序を入れ替えないので順時的ローレンツ変換と呼ばれる。

この分類を加えると、ローレンツ変換は次の 4 種類に分類できる。

$L_+^{(+)} : \{\Lambda\,;\ \Lambda^T g \Lambda = g,\ \det\Lambda = 1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$　　単位元に連結な成分（特殊相対論で扱われる成分＝固有ローレンツ群）

$L_+^{(-)} : \{\Lambda\,;\ \Lambda^T g \Lambda = g,\ \det\Lambda = 1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1\}$　　全反転 PT に連結な成分

$L_-^{(+)} : \{\Lambda\,;\ \Lambda^T g \Lambda = g,\ \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1\}$　　空間反転 P に連結な成分

$L_-^{(-)} : \{\Lambda\,;\ \Lambda^T g \Lambda = g,\ \det\Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1\}$　　時間反転 T に連結な成分

これら 4 種類のローレンツ変換は、$\mathbf{SO}(3,1)$ の連続変換によって互いに移り変わることのない連結部分になっている。特に、$L_+^{(+)}$ は単位元を含む（単位元と連続的につながっている）$\mathbf{SO}(3,1)$ の不変部分群であり、固有ローレンツ群と呼ばれる。

$L_+^{(+)}$ に次のものを掛けると、$L_+^{(-)}$, $L_-^{(+)}$, $L_-^{(-)}$ が得られる。

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

3、ローレンツ群のリー代数

微小変換 $\Lambda = e^{i\Gamma} \simeq 1 + i\Gamma$ を考えると、ローレンツ群のリー代数は

$\Gamma^T g + g\Gamma = 0$　　(3-1)　　$\longleftarrow$　$\Lambda^T g \Lambda = g$ より $(1 + i\Gamma)^T g (1 + i\Gamma) = g + i\Gamma^T g + i g\Gamma = g$　$\Gamma^T g \Gamma \simeq 0$

を満たす行列 $\Gamma \in \mathfrak{gl}(4,\mathbf{R})$ の集合である。

この式は行列の 16 成分に 10 個の条件を与えるので、独立な成分の数は 6 個となる。

(3-1) を満たすものとして次の 6 個の基底となる行列を選ぶことができる。（もちろんこれ以外の選び方もある。）

$$\Gamma_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Gamma_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix},\ \Gamma_{31}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{エルミート}$$

$$\Gamma_{01}=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Gamma_{02}=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \Gamma_{03}=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-i&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{反エルミート}\qquad (3\text{-}2)$$

他の成分は $\Gamma_{\mu\nu}=-\Gamma_{\nu\mu}$（$\Gamma_{00}=0,\cdots,\Gamma_{33}=0$）で定義される。ここで、$\Gamma_{12},\Gamma_{23},\Gamma_{31}$ は空間の回転、$\Gamma_{01},\Gamma_{02},\Gamma_{03}$ は時空の回転の生成子（Lorentz ブーストに対応している）である。後者の行列要素の符号が前者と異なるのは、ミンコフスキー計量の符号の違いによる。$\{\Gamma_{12},\Gamma_{23},\Gamma_{31}\}$ は時間成分を無視すると 3 次元直交群 $\mathbf{O}(3)$ のリー代数となっていることが分かる。従って、$\mathbf{O}(3)$ 群は $\mathbf{O}(3,1)$ 群の部分群である。

(3-1) を満たす任意の行列 Γ は上の $\Gamma_{\mu\nu}$ を用いて次のように表される。（この $\mu\nu$ は行列要素を表すものではなく、16 個の識別符号にすぎないので注意。）

$$\Gamma=\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu},\quad \omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}\qquad (3\text{-}3)$$

6 個の線形結合でよいのだが、このように置いたほうがすっきりする。

$\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$　$\Gamma_{\mu\nu}=-\Gamma_{\nu\mu}$（$\Gamma_{00}=0,\cdots,\Gamma_{33}=0$）なので $\frac{1}{2}$ となる（重複）。

交換関係

$$[\Gamma_{\mu\nu},\Gamma_{\rho\sigma}]=i(-g_{\mu\rho}\Gamma_{\nu\sigma}+g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\sigma}+g_{\mu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}-g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\rho})\qquad (3\text{-}4)$$

4、角運動量演算子と Lorentz ブースト演算子

この交換関係を見通しのよいものにするために、角運動量演算子 $\hat{\mathbf{J}}$ とブースト演算子 $\hat{\mathbf{K}}$ を次のように定義する。

$$\{J_1,J_2,J_3\}=\{\Gamma_{23},\Gamma_{31},\Gamma_{12}\}\ \text{あるいは、}J_i\equiv\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{jk}\quad i,j,k=1,2,3\qquad \text{エルミート}$$

$$\{K_1,K_2,K_3\}=\{\Gamma_{10},\Gamma_{20},\Gamma_{30}\}\ \text{あるいは、}K_i\equiv\Gamma_{i0}=-\Gamma_{0i}\qquad \text{反エルミート}\qquad (4\text{-}1)$$

レビ・チビタ（Levi-Civita）記号

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & (i\,j\,k)\text{ が }(1,2,3)\text{ の偶置換}\\-1 & (i\,j\,k)\text{ が }(1,2,3)\text{ の奇置換}\\0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

すると、(3-4) の交換関係は、次のように書き直せる。

$$[J_i,J_j]=i\,\epsilon_{ijk}J_k$$
$$[J_i,K_j]=i\,\epsilon_{ijk}K_k$$
$$[K_i,K_j]=-i\,\epsilon_{ijk}K_k\qquad (4\text{-}2)$$

さらに、**A** スピン、**B** スピンを次のように定義すると、

$$\mathbf{A}\equiv\frac{1}{2}(\mathbf{J}+i\mathbf{K}),\quad \mathbf{B}\equiv\frac{1}{2}(\mathbf{J}-i\mathbf{K})\qquad \text{エルミート}\qquad (4\text{-}3)$$

交換関係は、さらにすっきりした形になって、

$$[A_i,A_j]=i\,\epsilon_{ijk}A_k$$
$$[B_i,B_j]=i\,\epsilon_{ijk}B_k$$
$$[A_i,B_j]=0\qquad (4\text{-}4)$$

となる。

すなわち、**A**、**B** の演算子は互いに可換で、それぞれがよく知られる角運動量代数＝ $\mathbf{SU}(2)$ 群のリー代数を満たしている。したがって、ローレンツ群の有限次元既約表現は、**A** スピン、**B** スピンの大きさの組 (A , B : 整数または半整数) で指定され、その表現空間の次元は $(2A+1)(2B+1)$ 次元であることがわかる。

この表現に対応する場は、

$$\varphi^{(A,B)}_{a,b}(x)\qquad a=-A,-A+1,\cdots\cdots,A-1,A\qquad b=-B,-B+1,\cdots\cdots,B-1,B$$

という形の $(2A+1)(2B+1)$ 成分場で表わされ、a, b は A_3 , B_3 の固有値である。

5、**SL**(2,**C**)

3 次元回転群の普遍被覆群は **SU**(2) であったが、ローレンツ群は 3 次元回転群を拡張したものであるから、ローレンツ群の普遍被覆群 **SL**(2,**C**) は、**SU**(2) を拡張したものになる。（3 次元回転群と **SU**(2) のリー代数の構造（交換関係）が同じであったように、ローレンツ群のリー代数と **SL**(2,**C**) のリー代数は同型であり、ローレンツ群と **SL**(2,**C**) の間には準同型対応がある。）

(4-4) の交換関係より、**SU**(2) の表現を利用して **SL**(2,**C**) の表現が構成できることが分かる。**SL**(2,**C**) の表現は一般に D(A, B) (A, B = 0, 1/2, 1, 3/2, · · ·) と表され、表現の次元は (2A + 1)(2B + 1) である。**SL**(2,**C**) と固有ローレンツ群 $L_+^{(+)}$ との対応は、A + B が整数のときは 1：1、半整数のときは 2：1 で 2 価表現と呼ばれる。

SU(2) 再論

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}1)$$

$$D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger D(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D(\alpha,\beta,\gamma) = 1 \quad \text{行列式が 1 のユニタリ行列} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

この行列の集合は群をなし，2 次元特殊ユニタリー群，あるいは **SU**(2) と呼ばれる．

次の 2 行 2 列の行列を導入する。

$$X \equiv \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}2)$$

x, y, z は実数とする。X は明らかにトレース 0 のエルミート行列である。$X^\dagger = X$，$\mathrm{Tr}(X) = 0$

ここで (5-1) を用いて X に

$$X' = D(\alpha,\beta,\gamma)\, X\, D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger \qquad (5\text{-}3)$$

という X → X′ の変換を行ったとする。すると、X′ もエルミート行列でかつ対角成分の和がゼロであることが分かる。

$$X'^\dagger = (D(\alpha,\beta,\gamma)\, X\, D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger)^\dagger = D(\alpha,\beta,\gamma)\, X^\dagger\, D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger = D(\alpha,\beta,\gamma)\, X\, D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger = X'$$

$$\mathrm{Tr}(X') = \mathrm{Tr}(D(\alpha,\beta,\gamma)\, X\, D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger) = \mathrm{Tr}(X\, D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger D(\alpha,\beta,\gamma)) = \mathrm{Tr}(X) = 0$$

Tr(AB) = Tr(BA)，D はユニタリ行列

この結果、$X' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$ とできる。x′, y′, z′ は実数。

さらに、$\det X' = \det(D(\alpha,\beta,\gamma)\, X\, D(\alpha,\beta,\gamma)^\dagger) = \det X$ という関係式が成立する。

このことは、$x^2 + y^2 + z^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$ を意味する。

(x, y, z) → (x′, y′, z′) という変換は明らかに一次変換であるから、この変換は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = O(\alpha,\beta,\gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}4)$$

という、3 × 3 の行列 $O(\alpha,\beta,\gamma)$ の変換として書ける。

明らかに $O(\alpha,\beta,\gamma)$ は 3 次元回転 **SO**(3) の元でなければならない。また、$D(\alpha,\beta,\gamma)$ と $O(\alpha,\beta,\gamma)$ は 2 対 1 の対応であることは (5-3) から明らかである。何故ならば $D(\alpha,\beta,\gamma)$ と $-D(\alpha,\beta,\gamma)$ は、同じ $O(\alpha,\beta,\gamma)$ に対応しているからである。$D(\alpha,\beta,\gamma)$ と $D(\alpha+2\pi,\beta,\gamma) = -D(\alpha,\beta,\gamma)$ が同じ 3 次元回転 $O(\alpha,\beta,\gamma) = O(\alpha+2\pi,\beta,\gamma)$ に対応している。

SU(2) のスピノル

複素数の組 ξ, η を導入して、3 次元空間の回転 (5-3) と次のような変換とを対応付けることができる。

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to D(\alpha,\beta,\gamma) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}5)$$

$$x + iy = \frac{2\eta\xi^*}{|\xi|^2 + |\eta|^2}, \quad z = \frac{|\xi|^2 - |\eta|^2}{|\xi|^2 + |\eta|^2}$$

あるいは、$x = \dfrac{\eta\xi^* + \eta^*\xi}{|\xi|^2 + |\eta|^2}$, $y = \dfrac{1}{i}\dfrac{\eta\xi^* - \eta^*\xi}{|\xi|^2 + |\eta|^2}$, $z = \dfrac{|\xi|^2 - |\eta|^2}{|\xi|^2 + |\eta|^2}$

このような変換を受ける 2 成分の量のことをスピノルという。

$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ というように、下付きの添え字で表し、2 成分をまとめて λ, ζ と書くことにする。

このとき $\lambda_1\zeta_2 - \lambda_2\zeta_1 = (\lambda_1\ \lambda_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ は、変換 (5-5) のもとで不変である。*1

ここで、$\varepsilon^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ という 2 行 2 列の行列を導入し、$\lambda^i = \sum_{j=1,2} \varepsilon^{ij}\lambda_j$, $\lambda_i = \sum_{j=1,2} \varepsilon_{ij}\lambda^j$ という添え字が上付きの 2 成分量を定義する。

明らかに $\lambda^1 = \lambda_2$, $\lambda^2 = -\lambda_1$ であり、**SU**(2) のもとでの不変量は $\lambda_1\zeta_2 - \lambda_2\zeta_1 = -\lambda^2\zeta_2 - \lambda^1\zeta_1$ と書くことができる。ε_{ij} , ε^{ij} という行列は、スピノルの添え字を、それぞれ下げたり上げたりする役割を果たす。リーマン幾何学における計量テンソルに相当する。ε_{ij} と ε^{ij} とは逆行列の関係にある。

SU(2) のもとでの，上付き添え字の 2 成分量の変換は、

$$\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$$

となる。*2

一方、下付き添え字のスピノル変換 $\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ について複素共役をとると、

$$\begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1^* \\ \zeta_2^* \end{pmatrix}$$

となるので、

【定理 1】下付き添え字のスピノルの複素共役を取った 2 成分量と、上付き添え字の 2 成分量は、同じ変換規則に従う。

また、**SU**(2) の 2 次元表現 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ とその複素共役を取った $\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix}$ とは、恒等式

$$\begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって結ばれている。

---

*1　$(\lambda_1\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}^T \to \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right]^T = (\lambda_1\ \lambda_2)\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}$　　$(AB)^T = B^T A^T$

$$\lambda_1\zeta_2 - \lambda_2\zeta_1 = (\lambda_1\ \lambda_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$$\to (\lambda_1\ \lambda_2)\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = (\lambda_1\ \lambda_2)\begin{pmatrix} 0 & |a|^2 + |b|^2 \\ -|a|^2 - |b|^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

となるが、$|a|^2 + |b|^2 = 1$ であるから、$\lambda_1\zeta_2 - \lambda_2\zeta_1$ は不変量となる。

*2　$\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$　　$\varepsilon^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$$

SL(2,**C**)

【定理 2】固有ローレンツ群の普遍被覆群は **SL**(2,**C**) である。

(5-2) を拡張した

$$X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}6)$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という行列を定義する。(5-2) とは違って対角和はゼロにはなっていない。

SL(2,**C**) の任意の元を

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbf{C}) \qquad (ad - bc = 1) \qquad (5\text{-}7)$$

とし，この M を用いて X の変換 X → X' を次のように定義する．

$$X' = M X M^\dagger, \quad X' = \begin{pmatrix} x^{0\prime} + x^{3\prime} & x^{1\prime} - ix^{2\prime} \\ x^{1\prime} + ix^{2\prime} & x^{0\prime} - x^{3\prime} \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}8)$$

detM = 1 であるから，明らかに detX = detX′ が成り立つ．すなわち

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0\prime})^2 - (x^{1\prime})^2 - (x^{2\prime})^2 - (x^{3\prime})^2$$

が成り立つ。$x^\mu \to x^{\mu\prime}$ は一次変換であるから、**SL**(2,**C**) の元 M はローレンツ変換を定義している。しかし M ∈ **SL**(2,**C**) とローレンツ変換が 1 対 1 に対応しているわけではない。実際 M と − M とが同じローレンツ変換に対応していることは明らかである。対応関係は 2 対 1 なのである。

M, − M に対応するローレンツ変換を陽に書き下せば次のようになる。

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x^{0\prime} + x^{3\prime} \\ x^{0\prime} - x^{3\prime} \\ x^{1\prime} + ix^{2\prime} \\ x^{1\prime} - ix^{2\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & |b|^2 & ba^* & ab^* \\ |c|^2 & |d|^2 & dc^* & cd^* \\ ca^* & db^* & da^* & cb^* \\ ac^* & bd^* & bc^* & ad^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 \\ x^0 - x^3 \\ x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換のもとで x^μ と同じ変換規則に従う 4 つ組の量のことをローレンツ・ベクトルと呼ぶ。ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ はこの式から読み取ることができる。

【参考】

$M \sigma_\mu M^\dagger = \sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$

$X = x^\mu \sigma_\mu \quad X' = M X M^\dagger$ より、

$$X' = M X M^\dagger = M (x^\mu \sigma_\mu) M^\dagger = (M \sigma_\mu M^\dagger) x^\mu$$

$$X' = x'^\nu \sigma_\nu = (\Lambda^\nu{}_\mu x^\mu) \sigma_\nu = (\sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu) x^\mu$$

比較すると、$M \sigma_\mu M^\dagger = \sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$

関係式を列挙しておくと、

$$M \sigma_\mu M^\dagger = \sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu \qquad M^{\dagger-1} \sigma_\mu M^{-1} = \sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$$

$$M \bar\sigma^\mu M^\dagger = \bar\sigma^\nu \Lambda_\nu{}^\mu \qquad M^{\dagger-1} \bar\sigma^\mu M^{-1} = \bar\sigma^\nu \Lambda_\nu{}^\mu$$

$$M \bar\sigma_\mu M^\dagger = \bar\sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu \qquad M^{\dagger-1} \bar\sigma_\mu M^{-1} = \bar\sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$$

$$M \sigma^\mu M^\dagger = \sigma^\nu \Lambda_\nu{}^\mu \qquad M^{\dagger-1} \sigma^\mu M^{-1} = \sigma^\nu \Lambda_\nu{}^\mu$$

$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\bar\sigma^\mu M \sigma_\nu M^\dagger)$ 　　　$\bar\sigma$ 等は 、後述

これは、直接 $M \sigma_\mu M^\dagger = \sigma_\nu \Lambda^\nu{}_\mu$ を代入して確かめることができる。

すなわち、$\frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\bar\sigma^\mu M \sigma_\nu M^\dagger) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\bar\sigma^\mu \sigma_\rho \Lambda^\rho{}_\nu) = \Lambda^\mu{}_\nu \quad \leftarrow \quad \mathrm{Tr}(\bar\sigma^\mu \sigma_\rho) = 2\, \delta^\mu{}_\rho$

SL(2,**C**) のスピノル

ここでは、スピノルをローレンツ群の場合に拡張する。まずファン・デア・ヴェルデンに従って、点なしスピノルおよび点付きスピノルという概念を導入する。
ここでも、記法を整理するために、回転群のスピノルの場合と同様に

$$\varepsilon^{\alpha\beta}=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

という行列を導入し、これらの行列でスピノルの添え字の上げ下げを定義しておく。すなわち

$$\xi^\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\,,\ \xi_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta\,,\ \lambda^{\dot\alpha}=\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\lambda_{\dot\beta}\,,\ \lambda_{\dot\alpha}=\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\lambda^{\dot\beta}$$

ξ^α などの上付添え字は反変スピノール、ξ_α などの下付添え字は共変スピノールをあらわす。

点なし共変スピノル ξ_α $(\alpha=1,2)$ とは、**SL**(2,**C**) の元 M (5-7) によって

$$\xi_\alpha\to M_\alpha{}^\beta\,\xi_\beta\,,\quad \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\qquad(5\text{-}9)$$

と変換される量のことである。（スピノルについても、同じギリシャ文字が２度現れた場合は、和を取るものと約束する。）
これに対して点付き共変スピノル $\lambda_{\dot\alpha}$ (α=1,2) は

$$\lambda_{\dot\alpha}\to M^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\,\lambda_{\dot\beta}\,,\quad \begin{pmatrix}\lambda_{\dot1}\\\lambda_{\dot2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a^*&b^*\\c^*&d^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{\dot1}\\\lambda_{\dot2}\end{pmatrix}\qquad(5\text{-}10)$$

と変換される。点なしスピノルの複素共役を取った量は点付きスピノルである。反対に点付きスピノルの複素共役を取った量は点なしスピノルである。回転群のスピノルの場合は、【定理 1】のおかげで、点付きスピノルと点なしスピノルを区別する必要がなかった。しかしローレンツ群のスピノルに拡張した場合は、両者の区別が必要になる。

２つの点なしスピノル ξ_α,η_α から構成した

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1=(\xi_1\ \ \xi_2)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}$$

という量は、**SL**(2,**C**) の変換のもとで不変である。*3
同様に、２つの点付きスピノル $\lambda_{\dot\alpha}$ および $\zeta_{\dot\alpha}$ から構成した $\lambda_{\dot1}\zeta_{\dot2}-\lambda_{\dot2}\zeta_{\dot1}$ という量は、**SL**(2,**C**) の変換のもとで不変である。
添え字の上げ下げによる記法を用いるならば、**SL**(2,**C**) の変換のもとで不変な量は、$\xi_\alpha\eta^\alpha$, $\lambda_{\dot\alpha}\zeta^{\dot\alpha}$ と簡潔に書くことができる。ローレンツ変換のもとで不変な量のことをローレンツ・スカラーと呼ぶ。

$\xi_\alpha\eta^\alpha$, $\lambda_{\dot\alpha}\zeta^{\dot\alpha}$ がローレンツ・スカラーであることから、添え字が上についている反変スピノルの変換性は

$$\xi^\alpha\to((M^T)^{-1})^\alpha{}_\beta\,\xi^\beta\,,\qquad \begin{pmatrix}\xi^1\\\xi^2\end{pmatrix}\to(M^T)^{-1}\begin{pmatrix}\xi^1\\\xi^2\end{pmatrix}$$

$$\lambda^{\dot\alpha}\to((M^\dagger)^{-1})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\lambda^{\dot\beta}\,,\qquad \begin{pmatrix}\lambda^{\dot1}\\\lambda^{\dot2}\end{pmatrix}\to(M^\dagger)^{-1}\begin{pmatrix}\lambda^{\dot1}\\\lambda^{\dot2}\end{pmatrix}\qquad(5\text{-}11)$$

であることが分かる。

---

*3　恒等式 $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&ad-bc\\-ad+bc&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 等より　　$\leftarrow$ ad - bc = 1

$$\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1=(\xi_1\ \ \xi_2)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}\to(\xi_1\ \ \xi_2)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}=(\xi_1\ \ \xi_2)\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\end{pmatrix}$$

若干の公式

ここでは、$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=i\,\sigma_2$ とおく。　$\sigma_2\,\sigma_2=1$

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad M^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},\quad ad-bc=1$$

$M^T i\sigma_2 M = i\sigma_2$ より（左あるいは右から $i\sigma_2$ を掛ける）、$\sigma_2 M^T \sigma_2 = M^{-1}$ ，$\sigma_2 M \sigma_2 = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$

また、$M^* i\sigma_2 M^\dagger = i\sigma_2$ より、$\sigma_2 M^* \sigma_2 = (M^\dagger)^{-1} = (M^{-1})^\dagger$ ，$\sigma_2 M^\dagger \sigma_2 = (M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$　　上２つの式の随伴

スピノルによるローレンツベクトル

$$X^{\text{反}}=\begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}12)$$

$$x^0=\frac{1}{2}(\xi_{\dot{1}}\xi_1+\xi_{\dot{2}}\xi_2),\ x^1=\frac{1}{2}(\xi_{\dot{2}}\xi_1+\xi_{\dot{1}}\xi_2)$$
$$x^2=\frac{i}{2}(\xi_{\dot{2}}\xi_1-\xi_{\dot{1}}\xi_2),\ x^3=\frac{1}{2}(\xi_{\dot{1}}\xi_1-\xi_{\dot{2}}\xi_2)$$
x^μ は実数

とおくと（右辺は 4 個の実数成分をもつから可能）、右辺のスピノルの変換によって、左辺に (5-8) と同じ固有ローレンツ変換（$X^{\text{反}\prime}=MX^{\text{反}}M^\dagger$）がひきおこされることがわかる。

$$\because\quad \begin{pmatrix} \xi_1{}' \\ \xi_2{}' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}}{}' & \xi_{\dot{2}}{}' \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\left[M^*\begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} \\ \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix}\right]^T=M\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix}M^\dagger=MX^{\text{反}}M^\dagger$$

同様に、

$$X_{\text{共}}=\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}13)$$

$$x_0=\frac{1}{2}(\xi^1\xi^{\dot{1}}+\xi^2\xi^{\dot{2}}),\ x_1=\frac{1}{2}(\xi^2\xi^{\dot{1}}+\xi^1\xi^{\dot{2}})$$
$$x_2=\frac{i}{2}(\xi^2\xi^{\dot{1}}-\xi^1\xi^{\dot{2}}),\ x_3=\frac{1}{2}(\xi^1\xi^{\dot{1}}-\xi^2\xi^{\dot{2}})$$

右辺の変換によって、左辺に固有ローレンツ変換（$X_{\text{共}}{}'=(M^\dagger)^{-1}X_{\text{共}}M^{-1}$　※参照）がひきおこされる。

$$\because\quad \begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}\prime} \\ \xi^{\dot{2}\prime} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^{1\prime} & \xi^{2\prime} \end{pmatrix}=(M^\dagger)^{-1}\begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix}\left[(M^T)^{-1}\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}\right]^T=(M^\dagger)^{-1}\begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix}M^{-1}$$

※　$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ より、$X_{\text{共}}X^{\text{反}}=\begin{pmatrix} x^\mu x_\mu & 0 \\ 0 & x^\mu x_\mu \end{pmatrix}=x^\mu x_\mu I \quad\rightarrow\quad X^{\text{反}}=x^\mu x_\mu(X_{\text{共}})^{-1}$

$x^\mu x_\mu$ は不変だから、$X^{\text{反}\prime}=MX^{\text{反}}M^\dagger$ より　$X_{\text{共}}{}'=(M^\dagger)^{-1}X_{\text{共}}M^{-1}$

一般的には、次のようにしてスピノルから 4 元ベクトルを作ることができる。

4 次元化した pauli 行列　$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\equiv(1,\boldsymbol{\sigma})$，$(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\equiv(1,-\boldsymbol{\sigma})$，$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\equiv(1,-\boldsymbol{\sigma})$，$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\equiv(1,\boldsymbol{\sigma})$

$\alpha\dot{\beta}$ などのこの添え字位置を標準位置と決めておく。添え字の上げ下げは ε で行う。

$$V_\mu=\xi^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}}=\xi_\alpha(\varepsilon^T\sigma_\mu\varepsilon)^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}=\xi_\alpha(\bar{\sigma}_\mu{}^T)^{\alpha\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}=\eta_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\xi_\alpha \qquad \varepsilon^T\sigma_\mu\varepsilon=\bar{\sigma}_\mu{}^T$$
$$V^\mu=\xi_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\eta_\beta=\xi^{\dot{\alpha}}(\varepsilon^T\bar{\sigma}^\mu\varepsilon)_{\dot{\alpha}\beta}\eta^\beta=\xi^{\dot{\alpha}}(\sigma^{\mu T})_{\dot{\alpha}\beta}\eta^\beta=\eta^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\xi^{\dot{\alpha}}=g^{\mu\nu}V_\nu \qquad \varepsilon^T\bar{\sigma}^\mu\varepsilon=\sigma^{\mu T}$$

(5-14)

6、相対論的方程式

ここでは、ローレンツ変換のもとで形を不変に保つ微分方程式についてとりあげる。そのような方程式のことを相対論的方程式と呼ぶ。相対論的方程式としては、クライン・ゴルドン方程式やマクスウェル方程式などがよく知られているが、ここではスピノルが関与する相対論的方程式についてのみ簡単に触れておこう。

(5-12) の x^μ は

$$x^\mu=\frac{1}{2}\xi_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\xi_\beta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix}\bar{\sigma}^\mu\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\xi^\beta(\sigma^\mu)_{\beta\dot{\alpha}}\xi^{\dot{\alpha}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix}\sigma^\mu\begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (6\text{-}1)$$
$$x_\mu=\frac{1}{2}\xi^\alpha(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\xi^{\dot{\beta}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{pmatrix}\sigma_\mu\begin{pmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\xi_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\beta}\alpha}\xi_\alpha=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix}\bar{\sigma}_\mu\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。

ここで $\bar{\sigma}^\mu$, $\bar{\sigma}_\mu$ は

$$\bar\sigma^0=\bar\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{\dot\alpha\beta},\quad \bar\sigma^1=-\bar\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{\dot\alpha\beta},\quad \bar\sigma^2=-\bar\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}^{\dot\alpha\beta},\quad \bar\sigma^3=-\bar\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}^{\dot\alpha\beta} \qquad (6\text{-}2)$$

と定義されている。$\bar\sigma^\mu,\bar\sigma_\mu$ の添え字の上げ下げはミンコフスキー計量で行うものとする。

また、σ^μ, σ_μ を

$$\sigma^0=\sigma_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta},\quad \sigma^1=-\sigma_1=-\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta},\quad \sigma^2=-\sigma_2=-\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta},\quad \sigma^3=-\sigma_3=-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}_{\alpha\dot\beta} \qquad (6\text{-}3)$$

で定義する。

$\bar\sigma^\mu$, σ^μ の間には、次の関係がある。(直接計算によって容易に確かめられる。)

$$\varepsilon^{\delta\alpha}\,\varepsilon^{\dot\gamma\dot\beta}\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}=(\bar\sigma^\mu)^{\dot\gamma\delta}$$

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\gamma}\,(\bar\sigma^\nu)^{\dot\gamma\beta}+(\sigma^\nu)_{\alpha\dot\gamma}\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\gamma\beta}=2\,g^{\mu\nu}\,\delta_\alpha{}^\beta$$

$$(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\gamma}\,(\sigma^\nu)_{\gamma\dot\beta}+(\bar\sigma^\nu)^{\dot\alpha\gamma}\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\beta}=2\,g^{\mu\nu}\,\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \qquad (6\text{-}4)$$

簡略に書くと、

$$\varepsilon\,\sigma^\mu\,\varepsilon^T=\bar\sigma^{\mu T}$$

$$\sigma^\mu\,\bar\sigma^\nu+\sigma^\nu\,\bar\sigma^\mu=\bar\sigma^\mu\,\sigma^\nu+\bar\sigma^\nu\,\sigma^\mu=2\,g^{\mu\nu}$$

$$\sigma_\mu\,\bar\sigma_\nu+\sigma_\nu\,\bar\sigma_\mu=\bar\sigma_\mu\,\sigma_\nu+\bar\sigma_\nu\,\sigma_\mu=2\,g_{\mu\nu}$$

σ^μ, $\bar\sigma^\mu$, σ_μ, $\bar\sigma_\mu$ は次の関係式を満たす。*4

$$(M^*)_{\dot\delta}{}^{\dot\beta}\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\delta\gamma}\,(M)_\gamma{}^\alpha=\Lambda^\mu{}_\nu\,(\bar\sigma^\nu)^{\dot\beta\alpha}\quad\rightarrow\quad M^\dagger\,\bar\sigma^\mu\,M=\Lambda^\mu{}_\nu\,\bar\sigma^\nu$$

$$(M^{-1})_\alpha{}^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\delta}\,(M^{*-1})_{\dot\beta}{}^{\dot\delta}=\Lambda^\mu{}_\nu\,(\sigma^\nu)_{\alpha\dot\beta}\quad\rightarrow\quad M^{-1}\,\sigma^\mu\,(M^\dagger)^{-1}=\Lambda^\mu{}_\nu\,\sigma^\nu \qquad (6\text{-}5)$$

関係式を列挙しておくと、

$$M^\dagger\,\bar\sigma^\mu\,M=\Lambda^\mu{}_\nu\,\bar\sigma^\nu \qquad M^{-1}\,\bar\sigma^\mu\,(M^\dagger)^{-1}=\Lambda^\mu{}_\nu\,\bar\sigma^\nu$$

$$M^\dagger\,\sigma^\mu\,M=\Lambda^\mu{}_\nu\,\sigma^\nu \qquad M^{-1}\,\sigma^\mu\,(M^\dagger)^{-1}=\Lambda^\mu{}_\nu\,\sigma^\nu$$

$$M^\dagger\,\sigma_\mu\,M=\Lambda_\mu{}^\nu\,\sigma_\nu \qquad M^{-1}\,\sigma_\mu\,(M^\dagger)^{-1}=\Lambda_\mu{}^\nu\,\sigma_\nu$$

$$M^\dagger\,\bar\sigma_\mu\,M=\Lambda_\mu{}^\nu\,\bar\sigma_\nu \qquad M^{-1}\,\bar\sigma_\mu\,(M^\dagger)^{-1}=\Lambda_\mu{}^\nu\,\bar\sigma_\nu$$

---

*4　(6-5) は、(6-1) がローレンツ・ベクトルであること、ならびに ξ_α, $\xi_{\dot\alpha}$, ξ^α, $\xi^{\dot\alpha}$ の変換性から証明できる。

$$x^\mu=\frac{1}{2}\,\xi_{\dot\alpha}\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\beta}\,\xi_\beta,\quad x^\mu=\frac{1}{2}\,\xi^\beta\,(\sigma^\mu)_{\beta\dot\alpha}\,\xi^{\dot\alpha},\quad x_\mu=\frac{1}{2}\,\xi^\alpha\,(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\xi^{\dot\beta},\quad x_\mu=\frac{1}{2}\,\xi_{\dot\beta}\,(\bar\sigma_\mu)^{\dot\beta\alpha}\,\xi_\alpha$$

$$\xi_\alpha\rightarrow M_\alpha{}^\beta\,\xi_\beta,\quad \xi_{\dot\alpha}\rightarrow M^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\,\xi_{\dot\beta},\quad \xi^\alpha\rightarrow((M^T)^{-1})^\alpha{}_\beta\,\xi^\beta,\quad \xi^{\dot\alpha}\rightarrow((M^\dagger)^{-1})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\xi^{\dot\beta}$$

これらを使って、

$$x^\mu\rightarrow\Lambda^\mu{}_\nu\,x^\nu=\frac{1}{2}\,\Lambda^\mu{}_\nu\,\xi_{\dot\beta}\,(\bar\sigma^\nu)^{\dot\beta\alpha}\,\xi_\alpha$$

$$x^\mu=\frac{1}{2}\,\xi_{\dot\delta}\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\delta\gamma}\,\xi_\gamma\rightarrow\frac{1}{2}\,M^*{}_{\dot\delta}{}^{\dot\beta}\,\xi_{\dot\beta}\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\delta\gamma}\,M_\gamma{}^\alpha\,\xi_\alpha$$

$$\therefore\ M^*{}_{\dot\delta}{}^{\dot\beta}\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\delta\gamma}\,M_\gamma{}^\alpha=\Lambda^\mu{}_\nu\,(\bar\sigma^\nu)^{\dot\beta\alpha}\quad\rightarrow\quad M^\dagger\,\bar\sigma^\mu\,M=\Lambda^\mu{}_\nu\,\bar\sigma^\nu$$

同様に、

$$x^\mu=\frac{1}{2}\,\xi^\gamma\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\delta}\,\xi^{\dot\delta}\rightarrow\frac{1}{2}\,((M^T)^{-1})^\gamma{}_\alpha\,\xi^\alpha\,(\sigma^\mu)_{\gamma\dot\delta}\,((M^\dagger)^{-1})^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}\,\xi^{\dot\beta} \qquad M^{-1}\,\sigma^\mu\,((M^\dagger)^{-1})=\Lambda^\mu{}_\nu\,\sigma^\nu$$

ワイル方程式

2 成分のスピノル 1 個だけで書ける、最も簡単な相対論的方程式はワイル方程式である。それは次のようなものである。

$$p_\mu\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\,\xi_\alpha=0,\qquad p_\mu\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\lambda^{\dot\beta}=0 \qquad (6\text{-}6)$$

ここで p^μ は，粒子の 4 元運動量であるが、量子力学では

$$p_\mu = g_{\mu\nu}\, p^\nu = (p^0, -\mathbf{p}) = (i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\ ,\ i\hbar\ \nabla\ ) = i\hbar\, \partial_\mu$$

という微分演算子である。

この方程式で記述される粒子の質量はゼロである。

p_μ のローレンツ変換のもとでの振舞いは $p_\mu \to (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\, p_\nu$ となる。

ワイル方程式 (6-6) は、ローレンツ変換のもとで形を変えない。*5

---

*5　$p_\mu\, (\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\, \xi_\alpha = 0$ がローレンツ変換のもとで形を変えないことは、

$$p_\mu\, (\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\, \xi_\alpha = 0 \to (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\, p_\nu\, (\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\, (M)_\alpha{}^\gamma\, \xi_\gamma$$

$$= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\, p_\nu\, (M^* M^{*-1})_{\dot\delta}{}^{\dot\beta}\, (\bar\sigma^\mu)^{\dot\delta\alpha}\, (M)_\alpha{}^\gamma\, \xi_\gamma \qquad \text{ここで (6-5) を使う}$$

$$= (M^{*-1})_{\dot\delta}{}^{\dot\beta}\, p_\nu\, (\bar\sigma^\nu)^{\dot\delta\alpha}\, \xi_\alpha = 0$$

より明らかである。

$p_\mu\, (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\, \lambda^{\dot\beta} = 0$ の不変性も同様にして証明される。

ディラック方程式

点なしスピノルと点付きスピノルの連立方程式

$$p_\mu\, (\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\, \xi_\alpha = mc\ \lambda^{\dot\beta}, \qquad p_\mu\, (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\, \lambda^{\dot\beta} = mc\, \xi_\alpha \qquad \text{(6-7)}$$

も相対論的方程式である。ここで m は、この方程式で記述される粒子の質量を表す。c は光速である。

ここで、

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_\beta \\ \lambda_{\dot\beta} \end{pmatrix}, \qquad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \\ (\bar\sigma^\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

という記法を導入する。ψ は 4 成分でディラック・スピノルと呼ばれる。γ^μ は 4×4 の行列である.

すると、連立方程式 (6-7) は

$$(p_\mu\, \gamma^\mu - mc)\, \psi = 0\ , \qquad (i\hbar\, \gamma^\mu\, \partial_\mu - mc)\, \psi = 0$$

となり、この形に書いたものが量子力学で馴染み深いディラック方程式である。

4 つの行列 γ^μ は、(6-4) により

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\, g^{\mu\nu}$$

という代数関係を満たす。

2 成分スピノルの変換規則 (5-9)、(5-11) を，ψ を用いて書き直すと

$$\psi \to S\psi\,, \qquad S \equiv \begin{pmatrix} M_\alpha{}^\beta & 0 \\ 0 & (M^{*-1})_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^* & -c^* \\ 0 & 0 & -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

(6-5) の内容を γ^μ を用いて書き替えれば、上の S を用いて

$$S^{-1}\, \gamma^\mu\, S = \Lambda^\mu{}_\nu\, \gamma^\nu \qquad \text{(6-8)}$$

という関係式になる。これは (2-3) を用いれば

$$S\, \gamma_\mu\, S^{-1} = \gamma_\nu\, \Lambda^\nu{}_\mu\,, \qquad (\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\, \gamma^\nu) \qquad \text{(6-9)}$$

と書くこともできる。(6-9) を利用すれば、ディラック方程式の相対論的不変性は、4 成分の形のままで示すことができる。実際、ローレンツ変換をディラック方程式に施すと、$p^\nu \to p'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu\, p^\mu$，$\psi \to \psi' = S\,\psi$ という変換則を用いて

$$0 = (p_\mu\, \gamma^\mu - mc)\, \psi \qquad \text{両辺に左から S を掛け、右辺は間に } S^{-1} S \text{ をはさむ}$$

$$0 = S\, (p^\mu\, \gamma_\mu - mc)\, S^{-1}\, S\, \psi = (p^\mu\, \gamma_\nu\, \Lambda^\nu{}_\mu - mc)\, S\, \psi = (p'^\nu\, \gamma_\nu - mc)\, \psi'$$

と変形され、相対論的不変性は明らかとなる。

マヨラナ方程式

ディラック方程式の場合の $\lambda^{\dot{\alpha}}$ が、ξ^{α} の複素共役である場合がマヨラナ方程式である。すなわち

$$p_\mu\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\,(\xi^*)^{\dot{\beta}} = mc\,\xi_\alpha\,,\qquad p_\mu\,(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\,\xi_\beta = mc\,(\xi^*)^{\dot{\alpha}}$$

がそれにあたる。この 2 つの方程式は実は同じもので、2 つ書く必要はない。例えば 2 番目の方程式の複素共役を取り、

$$\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}\,[(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}]^*\,\varepsilon_{\beta\delta} = -(\sigma^\mu)_{\delta\dot{\gamma}}$$

を利用すれば 1 番目の方程式になる。

一般に

$$\begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}\xi_2\\ -\xi_1\end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}^* = (i\,\bar{\sigma}^2\,\xi)^*$$

と書くことができるので、マヨラナ方程式の場合の 4 成分スピノルは、添え字下付きで 2 成分の ξ_α のみを用いて

$$\psi = \begin{pmatrix}\xi\\ (i\,\bar{\sigma}^2\,\xi)^*\end{pmatrix}$$

と書ける。このことから、ψ が

$$i\,\gamma^2\,\psi^* = \begin{pmatrix}0 & i\,\sigma^2\\ i\,\bar{\sigma}^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi^*\\ i\,\bar{\sigma}^2\,\xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ i\,\bar{\sigma}^2\,\xi^*\end{pmatrix} = \psi$$

という関係式を満たすことも分かる。これはマヨラナ方程式の場合の特徴である。

補論

SL(2, C) の基本的表現＝スピノル表現　　九後汰一郎著「ゲージ場の量子論Ⅰ」より

「4、角運動量演算子と Lorentz ブースト演算子」のつづきとして、

スピンの大きさ $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はもちろん半整数または整数でなければならないから、もっとも簡単な基本表現は、

$(A, B) = (0, 1/2)$ および $(1/2, 0)$

の場合であり、それぞれ 2 次元表現である。

まず、$(0, 1/2)$ の表現を考えてみる。このときの場を 2 成分で $\xi_\alpha(x)$　$(\alpha = 1, 2)$ と表わすことにする。

$(A, B) = (0, 1/2)$ ということは、$\boldsymbol{A}$ スピン、$\boldsymbol{B}$ スピンが ξ_α の上で、それぞれ

$$D(\boldsymbol{A}) = 0\,,\quad D(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{\sigma}/2 \qquad (1)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列　$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$　$\sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$　$\sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

と表現されているということである。

したがって、$\boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ の表現は

$$D(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{\sigma}/2\,,\quad D(\boldsymbol{K}) = i\,\boldsymbol{\sigma}/2 \qquad \leftarrow \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\,,\quad \boldsymbol{K} = -i\,(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \qquad (2)$$

となる。

有限ローレンツ変換 $\hat{\Lambda} = exp(-\frac{i}{2}\,\epsilon^{ij}\,\hat{\Gamma}_{ij})$ を考えた場合、パラメーター ϵ^{ij} が

$$(\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12}) = -\boldsymbol{\theta}\,,\qquad (\epsilon_{10}, \epsilon_{20}, \epsilon_{30}) = \boldsymbol{\omega}$$

で与えられたとき、

$$\hat{\Lambda} = exp(\,i\,\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J} + i\,\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}\,) \qquad (3)$$

と書けるから、この $(0, 1/2)$ 表現の場合の 2×2 行列 $D(\Lambda)$ を $M_\alpha{}^\beta$ と書けば、

$$M_\alpha{}^\beta = \left[\,exp(\,i\,\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\,)\,\right]_\alpha{}^\beta \qquad (4)$$

を得る。

$\xi_\alpha(x)$ はこの $M_\alpha{}^\beta$ で

$\xi'_\alpha(x') = M_\alpha{}^\beta\, \xi_\beta(x)$　　(5)

なるローレンツ変換を受ける。

(4) の $M_\alpha{}^\beta$ は、角 $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\omega}$ を実数で変化させると、$det\, M = 1$ を満たす複素数上の 2×2 行列、すなわち **SL**(2,**C**) の元全体を走る。それゆえ (5) で変換する $\xi_\alpha(x)$ は、**SL**(2,**C**) のスピノールである。

(3) と (4) で、ローレンツ群と **SL**(2,**C**) 群の対応が与えられたわけであるが、実は、この対応は 1 対 2 の対応であることがわかる。実際、たとえば $\boldsymbol{\omega} = 0$ のとき、空間回転角 $\boldsymbol{\theta}$ の大きさ θ を $\theta = \theta + 2\pi$ にすると、(3) のローレンツ群の元 $\hat{\Lambda}$ はもとに戻るが、(4) の **SL**(2,**C**) の元 M は符号を変えて $-M$ になる（もとに戻すには 4π 回転しなければならない）。**SL**(2,**C**) のスピノール表現は、この意味で、ローレンツ群の 2 価値表現であるといわれる。

次に､｢ξ_α の複素共役 $(\xi_\alpha)^*$ と同一の変換する量｣を考え､これを $\eta_{\dot\alpha}$ （$\dot\alpha = 1, 2$）と置く。これは一般に､点付きスピノールと呼ばれるものである（これに対して、もとの ξ_α は点なしスピノールと呼ばれる）。

$\eta'_{\dot\alpha}(x') = M^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\, \eta_{\dot\beta}(x)$　　$M^*{}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \equiv (M_\alpha{}^\beta)^*$　　(6)

これを、**SL**(2,**C**) の **2*** スピノールともいう。

SU(2) のスピノルの場合は、「下付き添え字のスピノルの複素共役を取った 2 成分量と、上付き添え字の 2 成分量は、同じ変換規則に従う」という性質のおかげで、点付きスピノルと点なしスピノルを区別する必要がなかった。しかしローレンツ群のスピノルに拡張した場合は、両者の区別が必要になる。

M^* からこの時の $\boldsymbol{A}$ スピン、$\boldsymbol{B}$ スピンの表現行列を求めると、

$D(\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{\sigma}^*/2$,　$D(\boldsymbol{B}) = 0$　　(7)

添字を上げた基底 $\eta^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\eta_{\dot\beta}$ で見直せば *、これは $(A, B) = (1/2, 0)$ の表現であることがわかる。

実際、$\varepsilon(-\boldsymbol{\sigma}^*)\varepsilon^{-1} = \boldsymbol{\sigma}$ なので、この基底では、$D(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\sigma}/2$,　$D(\boldsymbol{B}) = 0$ となる。

* 次の行列でスピノルの添え字の上げ下げを定義する。

$\varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　$\varepsilon^{\alpha\beta}$ と $\varepsilon_{\alpha\beta}$ とは 逆行列の関係

添字を上げたスピノルの変換性は、$\xi'^\alpha(x') = (M^{-1})_\beta{}^\alpha\, \xi^\beta(x)$　　$\eta'^{\dot\alpha}(x') = (M^{*-1})_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha}\, \eta^{\dot\beta}(x)$

さまざまな既約表現

1）スカラー

点なしスピノール同士、あるいは点付きスピノール同士からは、添え字の縮約ができてスカラー量をつくることができる。たしかに、$\xi_\alpha\zeta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\xi_\beta\zeta_\alpha$ などは、不変量であることがわかる。

(5)　$\xi_\alpha \to M_\alpha{}^\beta\, \xi_\beta$　　$M_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,　$det(M) = ad - bc = 1$ とおくと、$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$

$$\xi_\alpha\zeta^\alpha = \xi_\alpha\varepsilon^{\alpha\beta}\zeta_\beta = (\xi_1\ \xi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \to (\xi_1\ \xi_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = (\xi_1\ \xi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ -ad + bc & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を使った。

略記形式では、

$M^T\varepsilon M = \varepsilon$　　$\varepsilon^\dagger = \varepsilon^T = \varepsilon^{-1} = -\varepsilon$　　これらの式はどちらの ε でも成り立つ。

$M^{-1} = \varepsilon M^T\varepsilon^T = \varepsilon^T M^T\varepsilon$

点なしスピノール同士、あるいは点付きスピノール同士からスカラー量をつくることができる事情は、群論でいえば、2 つの既約表現の直積表現を既約表現の直和に分解することによっても明らかとなる。

$\boldsymbol{2} \otimes \boldsymbol{2}$　　$(0, 1/2) \otimes (0, 1/2) = (0, 1) \oplus (0, 0)$　　*

$\boldsymbol{2}^* \otimes \boldsymbol{2}^*$　　$(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (1, 0) \oplus (0, 0)$

たしかに、スカラーとなる成分 $\boldsymbol{1}$：$(0, 0)$ があらわれる。

残りのスピン 1 の成分 $(0, 1)$ と $(1, 0)$ は、後で見る 2 階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$（6 成分）に対応する。

＊ **SU**(2) における $\boldsymbol{2}\otimes\boldsymbol{2}=\boldsymbol{3}\oplus\boldsymbol{1}$ を思い出せばよい。

$\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline\end{array} = \boldsymbol{1}$

$\boxed{1}\ \ \boxed{2}\ \ = \boldsymbol{2}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline\end{array}\ \ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\ \hline\end{array}\ \ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\ \hline\end{array}\ \ = \boldsymbol{3}$

....

$\boldsymbol{2}\otimes\boldsymbol{2}=\boldsymbol{3}\oplus\boldsymbol{1}$　$\boxed{}\otimes\boxed{a} = \begin{array}{|c|c|}\hline &a\\ \hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline a\\ \hline\end{array}$

2）４元ベクトル

点なしと点付きスピノール 1 個ずつの場合の合成則は、

$\boldsymbol{2}\otimes\boldsymbol{2}^*$　$(0\,,1/2)\otimes(1/2\,,0)=(1/2\,,1/2)$

となり、唯一の既約表現 $(A\,,B)=(1/2\,,1/2)$ が現れる。これは、4 成分量なので、4 元ベクトルである。

この 1 対の点なし・点付きスピノールの添え字の組 $(\alpha,\dot\beta)$ と 4 元ベクトル添え字 μ の間をつなぐ変換行列として、次の 4 次元化した pauli 行列を使う。

$(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\equiv(1,\boldsymbol{\sigma})\ ,\quad (\bar\sigma_\mu)^{\dot\alpha\beta}\equiv(1,-\boldsymbol{\sigma})$　＊　2-1

（この添え字 $\alpha\dot\beta$ 等は省略されることが多いが、この位置での意味での行列と解することにしておく＝標準位置。$\bar\sigma_\mu$ のスピノール位置を標準位置から下して、$(\bar\sigma_\mu)_{\dot\alpha\beta}\equiv\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\,\varepsilon_{\beta\delta}\,(\bar\sigma_\mu)^{\dot\gamma\delta}$ を定義すると、これは σ_μ の複素共役となる。$(\bar\sigma_\mu)_{\dot\alpha\beta}=[(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}]^*$。すなわち上のバーはもともと複素共役の意味なのである。）

$$\frac{1}{2}\,Tr(\bar\sigma^\mu\,\sigma_\nu)=\delta^\mu{}_\nu\ ,\quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\bar\sigma_\mu)^{\dot\gamma\delta}=\delta^\delta{}_\alpha\,\delta^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}$$

$$\sigma_\mu\,\bar\sigma_\nu+\sigma_\nu\,\bar\sigma_\mu=\bar\sigma_\mu\,\sigma_\nu+\bar\sigma_\nu\,\sigma_\mu=2\,g_{\mu\nu}$$

また、次式が成り立つ。

$$M\,\sigma_\mu\,M^\dagger=\sigma_\nu\,\Lambda^\nu{}_\mu$$

これに x^μ を掛けると、$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu\,x^\nu$ だから、

$$M\,\sigma_\mu\,M^\dagger x^\mu=\sigma_\nu\,x'^\nu$$

$x^\mu\,\sigma_\mu=\begin{pmatrix}x^0+x^3 & x^1-ix^2\\ x^1+ix^2 & x^0-x^3\end{pmatrix}=X$ とおくと、$X'=M\,X\,M^\dagger$

＊ σ_μ のスピノール添え字の構造が $(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}$ であることは、$M\,\sigma_\mu\,M^\dagger=\sigma_\nu\,\Lambda^\nu{}_\mu$ と、M と $M^\dagger$ とが (5) , (6) により $M_\alpha{}^\beta$，$(M^\dagger)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ の添え字構造を持っている事実とからわかる。

この σ_μ を使って、点なしスピノール ξ_α と点付きスピノール $\eta_{\dot\alpha}$ から、次のように 4 元ベクトル量 V_μ をつくることができる。

$$V_\mu=\xi^\alpha\,(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\,\eta^{\dot\beta}=\xi_\alpha\,(\,\varepsilon^T\,\sigma_\mu\,\varepsilon\,)^{\alpha\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}=\xi_\alpha\,(\bar\sigma_\mu{}^T)^{\alpha\dot\beta}\,\eta_{\dot\beta}\qquad \varepsilon^T\,\sigma_\mu\,\varepsilon=\bar\sigma_\mu{}^T$$

これに Lorentz 変換を行うと、たしかに共変ベクトルとして振る舞うことがわかる。

$$V'_\mu=\boldsymbol{\xi}'^T\,\varepsilon^T\,\sigma_\mu\,\varepsilon\,\boldsymbol{\eta}'=\boldsymbol{\xi}^T\,M^T\,\varepsilon^T\,\sigma_\mu\,\varepsilon\,M^*\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}^T\,\varepsilon^T\,M^{-1}\,\sigma_\mu\,M^{\dagger\,-1}\,\varepsilon\,\boldsymbol{\eta}\qquad \varepsilon^\dagger=\varepsilon^T=\varepsilon^{-1}=-\,\varepsilon,\ \varepsilon\,M^T\,\varepsilon^T=M^{-1},\ \varepsilon\,M^*\,\varepsilon^T=M^{\dagger\,-1}$$

$$=\boldsymbol{\xi}^T\,\varepsilon^T\,\Lambda_\mu{}^\nu\,\sigma_\nu\,\varepsilon\,\boldsymbol{\eta}\qquad M^{-1}\,\sigma_\mu\,M^{\dagger\,-1}=\Lambda_\mu{}^\nu\,\sigma_\nu\ \text{を使っている（本論参照）}$$

$$=\Lambda_\mu{}^\nu\,V_\nu$$

一般に、ベクトル V_μ と、点なし・点付き混合スピノール $V_{\alpha\dot\beta}$ とは、一つの量の単に異なる表示とみなせて、互いに

$$V_{\alpha\dot\beta}=V^\mu\,(\sigma_\mu)_{\alpha\dot\beta}\ ,\qquad V^\mu=\frac{1}{2}\,(\bar\sigma^\mu)^{\dot\beta\alpha}\,V_{\alpha\dot\beta}$$

で移りあう。

3）2 階反対称テンソル

複素数の 2 階反対称テンソル $F^{\pm}{}_{\mu\nu}$ で、

$$F^{\pm\mu\nu} = \pm\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{\pm}{}_{\rho\sigma}$$

を満たすとき、$F^{+}{}_{\mu\nu}$ を自己双対な、$F^{-}{}_{\mu\nu}$ を反自己双対なテンソルと呼ぶ。$F^{\pm}{}_{\mu\nu}$ はそれぞれ、${}_4C_2/2 = 3$ 成分の（複素）量である。

先の $\mathbf{2}\otimes\mathbf{2}$ あるいは $\mathbf{2}^*\otimes\mathbf{2}^*$ であらわれた $(0,1)$, $(1,0)$ の量も、それぞれ点なしスピノールどうし、あるいは点付きスピノールどうしを対称に組んで得られる 3 成分の量

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\xi_\alpha\zeta_\beta + \xi_\beta\zeta_\alpha) \equiv \frac{1}{2}\xi_{(\alpha}\zeta_{\beta)} \qquad \bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2}(\eta_{\dot\alpha}\varsigma_{\dot\beta} + \eta_{\dot\beta}\varsigma_{\dot\alpha}) \equiv \frac{1}{2}\eta_{(\dot\alpha}\varsigma_{\dot\beta)}$$

である。

対称純粋スピノール $F_{\alpha\beta}$ および $\bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta}$ は、それぞれ自己双対および反自己双対な 2 階反対称テンソル $F^{\pm}{}_{\mu\nu}$ と等価であり、その間をつなぐ変換行列には

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \equiv \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta \qquad 3\text{-}1$$

$$(\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \equiv \frac{i}{2}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$$

を使う。

（先と同様、ここに書いた σ, $\bar\sigma$ の掛け算でのスピノール添え字の位置を標準位置とよび、特に断らない限り、この位置での意味での行列と解することにしておく。）

$\sigma^{\mu\nu}$, $\bar\sigma^{\mu\nu}$ は次の式を満たす。

$$\sigma^{\mu\nu} = +\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}\,, \quad \bar\sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar\sigma_{\rho\sigma}$$

$$(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta} = [(\epsilon^T\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}]^*$$

$$\frac{1}{2}tr(\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma}) = \delta^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} + i\,\epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \qquad \delta^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \equiv \delta^\mu{}_\rho\delta^\nu{}_\sigma - \delta^\mu{}_\sigma\delta^\nu{}_\rho \qquad \epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} \equiv g_{\rho\kappa}g_{\sigma\lambda}\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$$

$$\frac{1}{2}tr(\bar\sigma^{\mu\nu}\bar\sigma_{\rho\sigma}) = \delta^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} - i\,\epsilon^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$$

これらより、(反) 自己双対テンソル $F^{\pm}{}_{\mu\nu}$ と純粋スピノール $F_{\alpha\beta}$, $\bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta}$ との等価関係式

$$F_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}F^{+}{}_{\mu\nu}\,, \quad \bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta} = -\frac{i}{2}(\epsilon^T\bar\sigma^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta}F^{-}{}_{\mu\nu} \qquad 3\text{-}2$$

$$F^{+}{}_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\epsilon\,\sigma_{\mu\nu})^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,, \quad F^{-}{}_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}(\bar\sigma_{\mu\nu}\epsilon^T)^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta} \qquad 3\text{-}3$$

が得られる。

実 2 階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$（実 6 成分）の場合、常に互いに複素共役な自己双対部分と反自己双対部分に分解できる。

$$F_{\mu\nu} = F^{+}{}_{\mu\nu} + F^{-}{}_{\mu\nu} \qquad F^{-}{}_{\mu\nu} = (F^{+}{}_{\mu\nu})^*$$

$$F^{\pm}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu}) \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

したがって、このとき 3-2 で対応する純粋スピノールも互いに複素共役 $\bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta} = (F_{\alpha\beta})^*$ であって、ちょうど 6 成分含んでいることになる。

3-1 の $\sigma^{\mu\nu}$ 行列は、2-1 の σ_μ, $\bar\sigma_\mu$ の定義を使って、

$$(\sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) = \boldsymbol{\sigma}\,, \quad (\sigma_{10}, \sigma_{20}, \sigma_{30}) = i\,\boldsymbol{\sigma}$$

であることがわかる。これはちょうど $(0, 1/2)$ 表現 ξ_α スピノール上での $\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{K}$ の表現行列 (2) の 2 倍である。すなわち、$(1/2)\,\sigma_{\mu\nu}$ は、ξ_α の上での Lorentz 群生成子 $\hat\Gamma_{\mu\nu}$ の表現になっている。

$$D(\hat\Gamma_{\mu\nu}) = \sigma_{\mu\nu}/2$$

したがって、ξ_α の Lorentz 変換 (4) , (5) は

$$\xi'_\alpha(x') = M_\alpha{}^\beta\,\xi_\beta(x) = \left[exp(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})\right]_\alpha{}^\beta\xi_\beta(x)$$

と書ける。

また (6) より、$\eta^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\eta_{\dot{\beta}}$ の Lorentz 変換が

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = (\varepsilon M^* \varepsilon^T)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\, \eta^{\dot{\beta}}(x) = \left[exp(-\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}) \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\, \eta^{\dot{\beta}}(x)$$

と、3-1 の $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ で書かれることもわかる。