相対論的共変性とスピノル

方程式が共変的であるとは、ローレンツ変換をしても同じ形が成りたつことをいう。ローレンツ変換とは、時空座標系の実 1 次変換 $x^i \to x'^i = \Lambda^i{}_j x^j$ であって、どんな x^i に対しても $g_{ij}\,dx'^i\,dx'^j = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$ の条件を満たすものをいう。

反変ベクトル　$A'^i = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j = \Lambda^i{}_j A^j$

共変ベクトル　$A'_i = \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^j} A_j$

N 階のテンソル　$T'^{abc\cdots\cdots}{}_{lmn\cdots\cdots} = \dfrac{\partial x'^a}{\partial x^d}\dfrac{\partial x'^b}{\partial x^e}\dfrac{\partial x'^c}{\partial x^f}\cdots\cdots\cdots\dfrac{\partial x^i}{\partial x'^l}\dfrac{\partial x^j}{\partial x'^m}\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^n}\cdots\cdots\cdots T^{def\cdots\cdots}{}_{ijk\cdots\cdots}$

ディラック方程式を共変的にするには、ψ をどのように変換すればよいか ―― これを調べると、ψ は反変ベクトルや共変ベクトルのように変換されず、別種の変換をなす量であることがわかった。ここからスピノルという概念が形づくられることになる。それまでは相対論的な式は、すべてテンソルを用いて書けると考えられていたが、網目をもれていたものとしてスピノルが出現したのである。

ローレンツ変換

$$X = \begin{pmatrix} ct+z & x-iy \\ x+iy & ct-z \end{pmatrix} = x^\mu \sigma_\mu \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと、$\det X = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ ＝ 不変　　$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X' = A^\dagger X A \quad \det A = 1$（ユニモジュラ性）　$\rightleftarrows$　固有ローレンツ変換（時間、空間反転なし）

が証明される。

このとき、$A^\dagger \sigma_\mu A = \Lambda^\nu{}_\mu \sigma_\nu$ となる。

$x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu \qquad x^0 := ct,\ x^1 := x,\ x^2 := y,\ x^3 := z$

$X' = A^\dagger X A = A^\dagger (x^\mu \sigma_\mu) A = (A^\dagger \sigma_\mu A) x^\mu$

$X' = x'^\nu \sigma_\nu = (\Lambda^\nu{}_\mu x^\mu)\sigma_\nu = (\Lambda^\nu{}_\nu \sigma_\nu) x^\mu$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix},\quad {}^tA = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix},\quad |A| = |A^\dagger| = |{}^tA| = 1$$

$\det A^\dagger = 1$（$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$）より、$A^* i\sigma_2 A^\dagger = i\sigma_2$ となることがわかる。　$i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

ここからさらに、

$\sigma_2 A^* \sigma_2 = (A^\dagger)^{-1}$　　← 上の式 $A^* i\sigma_2 A^\dagger = i\sigma_2$ の両辺に左から $i\sigma_2$ をかける　　$\sigma_2\sigma_2 = 1$

$= A$　（A がユニタリ $A^\dagger A = I$ のとき）

$\sigma_2 A^\dagger \sigma_2 = (A^*)^{-1}$　　上の転置

$= {}^tA$　（A がユニタリ のとき）

が導ける。

同様に、$\alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* = 1$ より、${}^tA\, i\sigma_2 A = i\sigma_2$

ここからさらに、

$\sigma_2\, {}^tA\, \sigma_2 = \sigma_2 A^{\dagger *} \sigma_2 = A^{-1}$　　← $A^{\dagger *} = {}^tA$，$\sigma_2\sigma_2 = 1$

$= A^\dagger$　（A がユニタリ のとき）

$\sigma_2 A \sigma_2 = (A^{-1})^t = ({}^tA)^{-1}$　　上の転置

$= A^*$　（A がユニタリ のとき）

が導ける。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta^* & -\gamma^* \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \quad , \qquad |A^{-1}| = 1$$

スピノル

スピノル（共変スピノル）

この $A^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ でもって、次のように変換される ξ_μ を共変スピノルという。

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = A^\dagger \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

点つき共変スピノル

$\begin{pmatrix} \xi_1'^* \\ \xi_2'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{vmatrix} = 1$ だから、$\begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \end{pmatrix}$ もスピノル（共変スピノル）であるが、

$\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}$ によって変換する量を、添字の上に点をつけて前者との特別な関係をあらわすことにする。

$$\begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}}' \\ \eta_{\dot{2}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} = A^{\dagger *} = {}^tA$$

反変スピノル

$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = i\sigma_2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ を定義すると、$\xi^\mu \eta_\mu =$ 不変（※ 参照）。

ξ^μ を反変スピノルと呼ぶ。

$\begin{pmatrix} \xi'^1 \\ \xi'^2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}$ とすると、$B = (i\sigma_2) A^\dagger (i\sigma_2)^{-1} = \sigma_2 A^\dagger \sigma_2 = (A^*)^{-1} \qquad \leftarrow (i\sigma_2)^{-1} = -i\sigma_2$

※ $\xi'^\mu \eta'_\mu = (\sigma_2 A^\dagger \sigma_2 \boldsymbol{\xi}^{\text{反}})^t A^\dagger \boldsymbol{\eta}_{\text{共}} = ((A^*)^{-1} \boldsymbol{\xi}^{\text{反}})^t A^\dagger \boldsymbol{\eta}_{\text{共}} = {}^t\boldsymbol{\xi}^{\text{反}} (A^\dagger)^{-1} A^\dagger \boldsymbol{\eta}_{\text{共}} = {}^t\boldsymbol{\xi}^{\text{反}} \boldsymbol{\eta}_{\text{共}} = \xi^\mu \eta_\mu$ 　不変

$i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ はスピノルにおける $g^{\mu\nu}$ のようなもの（共変スピノルを反変スピノルに切り替える）。

点つき反変スピノルの変換

点つき反変スピノル $\begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} \\ \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix} = i\sigma_2 \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \eta'^{\dot{1}} \\ \eta'^{\dot{2}} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} \\ \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix}$ とすると、

$C = (i\sigma_2) A^{\dagger *} (i\sigma_2)^{-1} = \sigma_2 A^{\dagger *} \sigma_2 = A^{-1} \qquad \leftarrow (i\sigma_2)^{-1} = -i\sigma_2$

$= A^\dagger$ 　（回転、ユニタリ $A^\dagger A = I$ のとき）

$= A^\dagger(-v)$ 　（v で動く座標系）　$A^{-1}(v) = A^\dagger(-v)$

スピノルによるローレンツ変換

いま、$X^{\text{反}} = \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix}$ とおくと（右辺は 4 個の実数成分をもつから可能）、右辺の変換によって、左辺に固有ローレンツ変換（$X^{\text{反}}{}' = A^\dagger X^{\text{反}} A$）がひきおこされることがわかる。

$$\because \quad \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}}' & \xi_{\dot{2}}' \end{pmatrix} = A^\dagger \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} {}^t\!\left[{}^tA \begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} \\ \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix} \right] = A^\dagger \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{pmatrix} A = A^\dagger X^{\text{反}} A$$

$$X_{共} = \begin{bmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{bmatrix}$$

右辺の変換によって、左辺に固有ローレンツ変換（$X_{共}{}' = A^{-1} X_{共} (A^{\dagger})^{-1}$　※参照）がひきおこされる。

$$\because \quad \begin{bmatrix} \xi^{\dot{1}\prime} \\ \xi^{\dot{2}\prime} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{1\prime} & \xi^{2\prime} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{bmatrix} (A^{\dagger})^{-1}$$

※　$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$ より、$X_{共} X^{反} = \begin{bmatrix} x^\mu x_\mu & 0 \\ 0 & x^\mu x_\mu \end{bmatrix} = x^\mu x_\mu I \quad \to \quad X^{反} = x^\mu x_\mu (X_{共})^{-1}$

$x^\mu x_\mu$ は不変だから、$X^{反}{}' = A^{\dagger} X^{反} A$ より $X_{共}{}' = A^{-1} X_{共} (A^{\dagger})^{-1}$

スピノルが関与する相対論的方程式

● Weyl の方程式（Weyl スピノル）

$\sigma_\mu \partial^\mu$ は、$X = x^\mu \sigma_\mu$ の x^μ を変換性の同じ ∂^μ で置きかえたものであるから、これにより固有ローレンツ変換に対して、

$$\sigma_\mu \partial^\mu \begin{bmatrix} \varphi^{\dot{1}} \\ \varphi^{\dot{2}} \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$$

のローレンツ共変なことがわかる。　　$\leftarrow$　全体に $'$ をとった $A^{\dagger} \sigma_\mu \partial^\mu A A^{-1} \begin{bmatrix} \varphi^{\dot{1}} \\ \varphi^{\dot{2}} \end{bmatrix} = \kappa A^{\dagger} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$ は上式に帰着する。

とくに、$\kappa = 0$ ととったものを Weyl の方程式とよぶ。

●空間反転

$$\begin{bmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \end{bmatrix} \quad と \quad \begin{bmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi^{\dot{1}} \\ \xi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 & \xi^2 \end{bmatrix}$$ をくらべると、

$\xi_a \rightleftarrows \xi^{\dot{a}}$　　$\xi_{\dot{a}} \rightleftarrows \xi^a$ の入れ替えによって、空間反転が表現されていることがわかる。

上の Weyl の方程式は、空間反転に対して共変ではない。空間反転に関して共変な方程式の例として、次の連立方程式があげられる。

$$\begin{cases} (\sigma_0 \partial^0 + \sigma_k \partial^k) \begin{bmatrix} \varphi^{\dot{1}} \\ \varphi^{\dot{2}} \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \\ (\sigma_0 \partial^0 - \sigma_k \partial^k) \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} \varphi^{\dot{1}} \\ \varphi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

すなわち、空間反転

$$\begin{cases} x^0 \longrightarrow x^0 \text{、} \quad x^k \longrightarrow -x^k \\ \begin{bmatrix} \varphi^{\dot{1}} \\ \varphi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \rightleftarrows \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

を行っても同じである。

$\kappa^2 = -\dfrac{m^2 c^2}{\hbar^2}$ のとき、クライン - ゴルドン型の

$(\sigma_\mu \partial^\mu + \dfrac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \psi = 0$　　になる。

※　上の連立方程式の片方の転置をとり、もう一方に左からかけてみる。

$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$ 、 $\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1 = 0$, ……（$1 \sim 3$）より、

$(\sigma_0 \partial^0 + \sigma_k \partial^k)(\sigma_0 \partial^0 - \sigma_k \partial^k) = \partial_\mu \partial^\mu I$

●時間反転

時間の反転は、同様に次の操作によって行われる。

$$\begin{cases} x^0 \longrightarrow -x^0 、\quad x^k \longrightarrow x^k \\ \begin{bmatrix} \varphi^{\dot{1}} \\ \varphi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \longrightarrow -\begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}、\quad \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \varphi^{\dot{1}} \\ \varphi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \end{cases}$$

前の連立方程式も時間反転に対して共変となるが、別の場との相互作用があるときはなりたたない。

●ディラックの方程式

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + i \frac{mc}{\hbar})\psi = 0 \qquad \gamma^0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \qquad \gamma^k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix}$$

実は、この Dirac の方程式は、先にとりあげた連立方程式と同じものである。ただし、波動関数の成分はたとえば次のようなものとなる。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 + \varphi^{\dot{1}} \\ \chi_2 + \varphi^{\dot{2}} \\ \chi_1 - \varphi^{\dot{1}} \\ \chi_2 - \varphi^{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{Dirac スピノル}$$

Dirac 表現というのは、Lorentz 群の表現として可約で、既約表現である二種類の Weyl スピノルを合成した表現といえる。

上の場合、固有ローレンツ変換（時間、空間反転なし）にともなう Dirac スピノルの変換は、

$$\psi'(x') = L\,\psi(x) \qquad L = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A^\dagger + C & A^\dagger - C \\ A^\dagger - C & A^\dagger + C \end{bmatrix}$$

となる。