ゲージ理論とリー代数

▌リー代数と対称性

以下、「参照」カ所は http://www.yam-web.net/science-note/ より

ここで、線形リー群 G が与えられていて、物理的状態の作るヒルベルト空間に対する G の元の作用が定義されているものとする。（いろいろな素粒子の場の演算子についての G の作用が定義されている。）

重要なことは、この G の作用によってラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ が不変になるという前提である。

G のリー代数を $\mathfrak{g}$ で表すことにする。そしてこの $\mathfrak{g}$ の生成元を T^j $(j = 1, \cdots\cdots, N)$ とする。（群論「リー代数」参照）

$T^1, \cdots\cdots, T^N$ の交換関係は次のような関係をみたしているものとする。

$$[\, T^i,\ T^j\,] = i\, c_{ijk}\, T^k$$

c_{ijk} は構造定数。右辺の k については $1, \cdots\cdots, N$ についての和がとられているものとする。

$T^1, \cdots\cdots, T^N$ をエルミートにとれば、c_{ijk} は実数になっている。

さらに次の式が成立するように $T^1, \cdots\cdots, T^N$ はとられているものとする。

$$\mathrm{Tr}(T^i\, T^j) = \frac{1}{2}\,\delta_{ij}$$

（群論「Ⅵ　リー群の具体例 SU(3)　ゲルマン行列」参照）

これは G がコンパクト半単純リー群のときは一般にこのようにとれることが証明される。

たとえば、$\mathfrak{su}(2)$ のときは $T^i = \frac{1}{2}\sigma^i$ と置けばよいし、$\mathfrak{su}(3)$ については $T^i = \frac{1}{2}\lambda^i$ と置けばよい。

c_{ijk} については、完全反対称となっている。つまり、

$$c_{ijk} = -\, c_{ikj}\,,\quad c_{ijk} = -\, c_{jik}\ \text{等}$$

ρ を $\mathfrak{g}$ の表現として、その次元を n とする。$\rho(T^i) = L^i$ とおけばもちろん

$$[\, L^i,\ L^j\,] = i\, c_{ijk}\, L^k$$

を満足する。

G の元 U は、

$$U(\boldsymbol{\beta}) = \exp(-\, i\, \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}) \qquad \rho(T^i) = L^i$$

と表現することができる。

例えば、G の元 U が $\varphi_a(x)$ に与える変換は、

$$\varphi_a(x) \ \longrightarrow\ U\,\varphi_b(x) = \exp(-\, i\, \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L})_{ab}\, \varphi_b(x)$$

▌大域的変換と局所的変換

さてラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ はこの G の変換に関して対称である＝不変であるものとする。

たとえば n 個のフェルミ粒子の場 ψ_a $(a = 1, \cdots\cdots, n)$ や m 個の複素スカラー場 φ_b $(b = 1, \cdots\cdots, m)$ があったとする。ここにスカラー場というのはスピンがないというだけのことである。さらに n 次元のユニタリー表現 ρ と m 次元のユニタリー表現 ρ′ があったとして

$$\rho(T^i) = L^i\,,\quad \rho'(T^i) = L'^i$$

として ψ_a は L^i で変換され、φ_b は L'^i で変換されるとする。すると、比較的一般的な次の形のラグラジアン密度 $\mathscr{L}$ は G で対称（不変）になっている。

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}_a\, i\, \partial\!\!\!/\, \psi_a + (\partial_\mu \varphi_b)^\dagger\, \partial^\mu \varphi_b - V(\varphi) + \Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a\, \psi_b\, \varphi_c + \Gamma_{ab}{}^{c*}\, \varphi_c{}^\dagger\, \bar{\psi}_b\, \psi_a \qquad \partial\!\!\!/ = \gamma^\mu\, \partial_\mu$$

ここで $V(\varphi)$ は $\varphi^\dagger\varphi = \varphi_b{}^\dagger\varphi_b$ の多項式である。

最後の２項 $\Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a\, \psi_b\, \varphi_c + \Gamma_{ab}{}^{c*}\, \varphi_c{}^\dagger\, \bar{\psi}_b\, \psi_a$ は Yukawa 項といわれるもので、ψ 場と φ 場との相互作用を表わす項となっている。$\Gamma_{ab}{}^{c*}\, \varphi_c{}^\dagger\, \bar{\psi}_b\, \psi_a$ は $\Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a\, \psi_b\, \varphi_c$ の H.C. (Hermite 共役) である。したがってこの形はしばしば $\Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a\, \psi_b\, \varphi_c$ + H.C. とかかれる。ここでもちろん $\Gamma_{ab}{}^c$ はスカラーであって、さらに G の変換によって $\Gamma_{ab}{}^c$ が Yukawa 項全体が不変になるように変換を受けるものとする。以下、Yukawa 項の影響はほとんどないので多くの場合 Yukawa 項は省略することにする。

上の形が G について対称すなわち不変であることは、たとえば $\varphi^\dagger\varphi$ をとれば

$$\varphi_b{}^\dagger\, \varphi_b \ \longrightarrow\ ((e^{-\,i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{bc}\, \varphi_c)^\dagger\, ((e^{-\,i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{bd}\, \varphi_d) = \varphi_c{}^\dagger\, (e^{\,i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{cb}\, (e^{-\,i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{bd}\, \varphi_d = \varphi_c{}^\dagger\, \delta_{cd}\, \varphi_d = \varphi_b{}^\dagger\, \varphi_b$$

からわかる。ここで表現がユニタリーであることが用いられている。

ここで扱ったような G の変換（x について無関係な変換）で $\mathscr{L}$ が不変なことを、**大域的変換**に対して不変という。（＝ global symmetry）

もっと詳しくいえば、G の元 $U(\boldsymbol{\beta}) = \exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L})$ をとったとき $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots\cdots, \beta_N)$ は x に無関係である 。

これに対して、ゲージ理論と呼ばれるものは、$U(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots\cdots, \beta_N)$ を x についての関数 $\boldsymbol{\beta}(x) = (\beta_1(x), \cdots\cdots, \beta_N(x))$ にかえたときどうなるか？ということである。この場合 $\boldsymbol{\beta}(x)$ は x に依存するから、この形の変換について対称（不変）であることを、局所的変換について対称（不変）という。（local symmetry）

▌ゲージ場の導入

局所的変換は $U(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{\beta}$ が x に依存するということであった。

$$\varphi_a(x) \longrightarrow \varphi_a'(x) = [U(\boldsymbol{\beta}(x))]_{ab}\,\varphi_b(x) = = [\exp(-i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L})]_{ab}\,\varphi_b(x) \qquad \text{b について和をとる} \qquad ①$$

ラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ が G について大局的対称性を満たしているからといって局所的対称性を満たすとはならない。これは上でみた典型的なラグランジアン密度の場合でいえば、$V(\varphi)$ や Yukawa 項はよいのであるが、$\bar{\psi}_a\, i\,\partial\!\!\!/\psi_a$ と $(\partial_\mu\varphi_b)^\dagger\,\partial^\mu\varphi_b$ では ∂_μ による偏微分があるため $\boldsymbol{\beta}(x)$ の微分が現れてきて対称性が破れてしまうためである。

ゲージ理論では、この対称性の破れを回復するため新しい場＝ゲージ場 $\mathbf{A}(x)$（$A^1, \cdots\cdots, A^N$）を導入することになる。ゲージ場は各点で φ をはかる物指しのようなものであり、これを都合よく操作して対称性を取り戻そうというのである。

$\varphi_a(x)$ をそのまま x+dx に平行移動して、点 x+dx に用意されているゲージで計られた場を $\varphi_a(x+dx)_\parallel$ と書くことにする。$\varphi_a(x+dx)_\parallel \neq \psi_a(x+dx)$　このとき、dx は十分小さいと考えているので、平行移動後の場と元の場との差は $\varphi_a(x)$ に線形であり、dx に比例していると考えて良いだろう。

すなわち、ある A(x) があって、

$$\varphi_a(x+dx)_\parallel - \varphi_a(x) = i\,g\,[A(x)]_{ab}\,\varphi_b(x)\,dx \qquad \text{b について和をとる} \qquad ②$$

ここで、行列 $(A)_{ab}$ が、点 x から x+dx へ移動したときの “内部空間” の “回転” を指定している。A(x) がゲージ場であり、一般相対論のところで現われる接続 Γ に対応している。A(x) は群 G に対応するリー代数 $\mathfrak{g}$ の生成子の線形結合で書けることが期待されるので、

$$[A(x)]_{ab} = \sum_{i=1}^{\dim \mathbf{G}} [A^i(x)\,L_i]_{ab} = \mathbf{A}(x)\cdot\mathbf{L} \qquad \rho(T_i) = L_i$$

と表わされる。こうして、ゲージ場 $\mathbf{A}(x)$ は群 G の次元だけの成分を持つことが理解される 。

▌共変微分

以下、場 $\psi_a(x)$ の添え字 a 等を省略することにする。

x+dx にある場の差

$$\begin{aligned}\psi(x+dx) - \psi_\parallel(x+dx) &= \psi(x) + \partial_\mu\psi(x) - (\psi(x) + i\,g\,A_\mu(x)\,\psi(x))\\ &= (\partial_\mu\psi(x) - i\,g\,A_\mu(x)\,\psi(x))\,dx^\mu \qquad A(x) = \mathbf{A}(x)\cdot\mathbf{L}\\ &= D_\mu\psi(x)\,dx^\mu\end{aligned}$$

定義　$D_\mu := \partial_\mu - i\,g\,A_\mu(x)$　　共変微分

を考える。

左辺は x+dx での量なので U(x+dx) で変換される。変換後の量に ′(プライム) を付けて表わすと（$U(x)\psi(x) = \psi'(x)$ などとするということ）、上の式は

$$U(x+dx)(\psi(x+dx) - \psi_\parallel(x+dx)) = U(x+dx)(D_\mu\psi(x)\,dx^\mu)$$

となるが、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \psi'(x+dx) - \psi'_\parallel(x+dx) = (\partial_\mu\psi'(x) - i\,g\,A'_\mu(x)\,\psi'(x))\,dx^\mu\\ &= (D_\mu\psi)'(x)\,dx^\mu = D'_\mu(x)\psi'(x)\,dx^\mu = D'_\mu(x)U(x)\psi(x)\,dx^\mu\end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = U(x+dx)D_\mu\psi(x)\,dx^\mu = U(x)D_\mu\psi(x)\,dx^\mu \qquad U(x+dx) \approx U(x) + \partial U(x)\,dx$$

となる。両辺等値すると、$D_\mu(x)$ の変換が得られる。

$$D_\mu(x) = \partial_\mu - i\,g\,A_\mu(x)$$

$$D'_\mu(x) = U(x)D_\mu(x)U(x)^{-1} \qquad ③$$

ここで、$U(x) = e^{-i\,\beta^i(x)\,L_i}$、$A_\mu(x) = A^i_\mu(x)\,L_i$ であった。この $D_\mu(x)$ を共変微分と呼ぶ。

この $D_\mu(x)$ の変換から、ゲージ場 $A_\mu(x)$ のゲージ変換が導かれる。ただし、∂ が宙ぶらの状態だと評価できないので、状態関数に作用したもので評価する。

$(D_\mu\psi)' = U\,D_\mu U^{-1}\,\psi' = U\,D_\mu U^{-1}\,U\,\psi = U\,D_\mu\psi$

最左辺 $= (\partial - i\,g\,A)'\,\psi' = (\partial - i\,g\,A)'\,U\,\psi = -\,i\,g\,A'\,U\,\psi + \partial U\,\psi + U\,\partial\psi$

最右辺 $= U\,(\partial - i\,g\,A)\,\psi = U\,\partial\psi - i\,g\,U\,A\,\psi$

以上より、

$-\,i\,g\,A'\,U\,\psi + \partial U\,\psi + U\,\partial\psi = U\,\partial\psi - i\,g\,U\,A\,\psi$

$i\,g\,A'\,U\,\psi = (i\,g\,U\,A + \partial U)\,\psi$

$A' = U\,A\,U^{-1} - \dfrac{i}{g}\,\partial U\,U^{-1}$　　$\partial(U\,U^{-1}) = 0$ なので $\partial U\,U^{-1} = -\,U\,\partial U^{-1}$ でもよい

$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x)\,A_\mu(x)\,U^{-1}(x) - \dfrac{i}{g}\,\partial_\mu U(x)\,U^{-1}(x)$　　④

▍場の強さ（曲率）

次に、$x \rightarrow x + dx + dy$ への平行移動を、(1) $x \rightarrow x + dx \rightarrow x + dx + dy$　(2) $x \rightarrow x + dy \rightarrow x + dx + dy$ の 2 通りの方法で考える（径路の違い）。平行移動を繰り返すと、

(1) $x \rightarrow x + dx$

$\psi_\parallel(x + dx) = \psi(x + dx) - D_\mu(x)\psi(x)\,dx^\mu$

$x + dx \rightarrow x + dx + dy$

$$\begin{aligned}\psi_\parallel{}^\parallel(x + dx + dy) &= \psi_\parallel(x + dx + dy) - D_\nu(x + dx)\psi_\parallel(x + dx)\,dy^\nu \\ &= \psi(x + dx + dy) - D_\mu(x + dy)\psi(x + dy)\,dx^\mu \\ &\quad - D_\nu(x + dx)\psi(x + dx)\,dy^\nu + D_\nu(x + dx)D_\mu(x)\psi(x)\,dx^\mu\,dy^\nu\end{aligned}$$

(2) $x \rightarrow x + dy$

$\psi_\parallel(x + dy) = \psi(x + dy) - D\nu(x)\psi(x)dy\nu$

$x + dy \rightarrow x + dx + dy$

$$\begin{aligned}\psi^\parallel{}_\parallel(x + dx + dy) &= \psi_\parallel(x + dx + dy) - D_\mu(x + dy)\psi_\parallel(x + dy)\,dx^\mu \\ &= \psi(x + dx + dy) - D_\nu(x + dx)\psi(x + dx)\,dy^\nu \\ &\quad - D_\mu(x + dy)\psi(x + dy)\,dx^\mu + D_\mu(x + dy)D_\nu(x)\psi(x)\,dx^\mu\,dy^\nu\end{aligned}$$

辺々差をとると、dxdy の次数までで

$\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = \psi^\parallel{}_\parallel - \psi_\parallel{}^\parallel = [\,D_\mu(x)\,,D_\nu(x)\,]\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu$

が得られる。両辺 $U(x + dx + dy)$ で変換するが、dxdy の次数までで $(\boldsymbol{\Delta}\psi)'(x) = U(x + dx + dy)\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = U(x)\boldsymbol{\Delta}\psi(x)$ となるので、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Delta}\psi)'(x) &= U(x)\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = U(x)[\,D_\mu(x)\,,D_\nu(x)\,]\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu \\ &= U(x)[\,D_\mu(x)\,,D_\nu(x)\,]U^{-1}(x)\cdot U(x)\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu\end{aligned}$$

となる。ここで、

$F_{\mu\nu} = \dfrac{i}{g}\,[\,D_\mu(x)\,,D_\nu(x)\,] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i\,g\,[\,A_\mu(x)\,,A_\nu(x)\,]$　　⑤

を導入する。$F_{\mu\nu}$ の変換性は D_μ の変換性③より

$F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)$　　⑥

となることがわかる。こうして、先の式は

$\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = -\,i\,g\,F_{\mu\nu}\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu$

$(\boldsymbol{\Delta}\psi)'(x) = -\,i\,g\,F'_{\mu\nu}\psi'(x)\,dx^\mu dy^\nu$

となる。

ところで、$F_{\mu\nu}$ は A_μ で書けているので、リー代数 $\mathfrak{g}$ の生成子 $\{\,L_a\,\}$ の線型結合で表わされる。

$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^{\dim G} F^a{}_{\mu\nu}(x)\,L_a$

$F^a{}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a{}_\nu(x) - \partial_\nu A^a{}_\mu(x) + g\, c_{abc}\, A^b{}_\mu(x)\, A^c{}_\nu(x)$　　⑦

ここで、2 行目は⑤から交換関係を計算し直接得られる。ここで、c_{abc} はリー代数 $\mathfrak{g}$ の構造定数である。

この $F_{\mu\nu}(x)$、または $F^a{}_{\mu\nu}(x)$ を場の強さ (field strength) と呼ぶ。

▌ゲージ不変なラグランジアン密度の構成

以上の準備より、local symmetry でのゲージ不変なラグランジアン密度を構成することができる。ここでは微分は共変微分に書き換えることになる（一般相対性理論の操作とおなじ）。

物質場の局所位相変換とゲージ場を導入した変換

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = U\varphi、A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = U(x)\, A_\mu(x)\, U^{-1}(x) - \frac{i}{g}\partial_\mu U(x)\, U^{-1}(x)$$

をゲージ変換と呼ぶことにすると、共変微分を用いた $\bar\psi\, i\, D_\psi \psi$ とか $(D_\phi{}^\mu\varphi)^\dagger D_{\phi\,\mu}\varphi$ の形のものはこのゲージ変換で不変であることがわかる（対称性＝不変性を回復することができる）。

ここで D_ψ とか D_ϕ とかに分けたのは、ψ と ϕ とで G の表現も変わるかもしれないからである。そのときには D_ψ に導入されるゲージ場 $A^1, \cdots\cdots, A^n$ と D_ϕ に導入されるゲージ場 $B^1, \cdots\cdots, B^m$ とは異なるものであるし（個数も違うのが普通である）、そのとき

$\partial_\mu - i\, g\, \mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}$　　$\partial_\mu - i\, g\, \mathbf{B}_\mu\cdot\mathbf{L}'$　　（$A_\mu = \mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}$　　$B_\mu = \mathbf{B}_\mu\cdot\mathbf{L}'$）

としたときの $\mathbf{L}$、$\mathbf{L}'$ も異なるのが普通である。

例　1 個の自由フェルミ粒子（G = U(1) の場合）

ラグランジアン密度 $\mathscr{L}_0$ を

$$\mathscr{L}_0 = \bar\psi\,(\, i \not\partial - m\,)\,\psi \qquad \not\partial = \gamma^\mu\partial_\mu$$

として、G = U(1) であって G の元 $U(\beta) = e^{-i\beta}$ によって ψ の受ける変換を

$$\psi(x) \quad\longrightarrow\quad e^{-i\beta}\psi(x)$$

とすれば、もちろん global symmetry は成立している。

local symmetry（$U = e^{-i\beta(x)}$: $\psi(x) \longrightarrow e^{-i\beta(x)}\psi(x)$）では、ゲージ場 A_μ を導入して、ゲージの共変微分 D_μ を

$$D_\mu = \partial_\mu - i\, g\, A_\mu(x)$$

と定義する。これを使ってラグランジアン密度を次のように書き直す。

$$\mathscr{L} = \bar\psi\,(\, i \not D - m\,)\,\psi \qquad \not D = \gamma^\mu D_\mu = \not\partial - i\, g \not A$$

G の元 $U(\beta) = e^{-i\beta(x)}$ によって A_μ は

$$A_\mu(x) \quad\longrightarrow\quad A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x) \qquad （A' = U\,A\,U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)\,U^{-1} \text{ or } \mathbf{A}_\mu'\cdot\mathbf{L} = U\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\,U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)\,U^{-1} \text{ より}）$$

という変換を受ける。ここで $\mathbf{L} = 1$, $\partial_\mu e^{-i\beta(x)} = -i\, e^{-i\beta(x)}\,\partial_\mu\beta(x)$ を用いている。

$D_\mu\psi(x)$ の変換は

$$D_\mu\psi(x) \quad\longrightarrow\quad e^{-i\beta(x)} D_\mu\psi(x) \qquad ③より\ (D_\mu\psi)' = U\, D_\mu U^{-1}\,\psi' = U\, D_\mu U^{-1}\, U\psi = U\, D_\mu\psi$$

である。

これらより、共変微分で書き直した新しいラグランジアン密度

$$\mathscr{L} = \bar\psi\,(\, i \not D - m\,)\,\psi$$

がゲージ変換で不変であることがすぐわかる。

しかし、この式が新しいラグランジアン密度のすべてではない。A_μ という新しい場が付け加えられたのであるから A_μ の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の部分が加わる。

$$\mathscr{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

この $F_{\mu\nu}$ がゲージ変換で不変であることは

$$F_{\mu\nu} \quad\longrightarrow\quad \partial_\mu\Big(A_\nu - \frac{1}{g}\partial_\nu\beta(x)\Big) - \partial_\nu\Big(A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x)\Big) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

となることから明らかである。

いま付け加えられた場 A_μ が質量が 0 でないとすれば A_μ の質量を表わすラグランジアン密度の項

$$\mathscr{L}_{mass} = \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu$$

質量項については前回掲載の「自発的対称性の破れとヒッグス機構 / ラグランジアンの質量項」参照

を付け加えなければならないが、この項はゲージ変換で不変でないから、ゲージ理論の要請から A は質量 0 の粒子の場であることがわかる。

全体として新しいラグランジアン密度は次の形となる。

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} + g\not{A} - m)\psi$$

ここでゲージ場 A_μ がゲージ理論によって自動的に得られるのがゲージ理論の長所である。この新しい場 A_μ は質量 0 であるから、その力は遠くにまで到達する。この現象は電磁場の場合はよいが、その他の場合にはそのままでは最終的な結果が得られないことを示している。

一般の G の場合

まず、G = U(1) の場合をみたが、ここでは一般の G の場合を考えることにする。

n 個の場 φ_a (a = 1, …… , n) があって、G の n 次元の表現を ρ として、$\mathfrak{g}$ の生成元 T^i に対して $\rho(T^i) = L^i$ として、T^i, L^i, c_{ijk} については前の条件が満たされているものとする。

さらに G の元 $U(\boldsymbol{\beta}) = \exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L})$ によって φ は

$$\varphi \longrightarrow U(\boldsymbol{\beta})\,\varphi$$

と変換を受け、新しいラグランジアン密度の主な部分は

$$\partial_\mu \Longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - i\,g\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}$$

なる置き換えによって得られる。ここに A_μ は新しく導入された場であり、次の条件をみたす変換 $\mathbf{A}_\mu \longrightarrow \mathbf{A}_\mu'$ を受けるものとする。

$$\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}_\mu'\cdot\mathbf{L} = U\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\,U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)\,U^{-1}$$

ここで $\mathbf{A}_\mu'$ の具体的な形を求めることにする。

$[L^i, L^j] = i\,c_{ijk} L^k$、$\boldsymbol{\beta}$ を無限小とすれば、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} \longrightarrow\ & (1 - i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L})\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\,(1 + i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L}) - \frac{i}{g}(-i\,\partial_\mu\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L})(1 + i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L})\\ &= \mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} - i\,\beta^i A_\mu{}^j (L^i L^j - L^j L^i) - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}\\ &= \mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} + \beta^i A_\mu{}^j L^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}\end{aligned}$$

ここで c_{ijk} が完全反対称であることを用いれば、

$$A_\mu{}^i \longrightarrow A_\mu{}^i + \beta^j A_\mu{}^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta^i$$

（この計算のなかでは $\boldsymbol{\beta}$ が無限小なだけでなく、$\partial_\mu\boldsymbol{\beta}$ も無限小であることが仮定されている。もちろん $\boldsymbol{\beta}$ が $\boldsymbol{\epsilon\theta}$ のような形ならばこれはみたされる。）

さてこの一般の場合に新しいラグランジアンを得るためには、新しく導入されたゲージ場 A_μ の運動エネルギーを表わす次の項を付け加えなければならない。

$$\mathscr{L}_{kin} = -\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{i\,\mu\nu} \qquad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

ここで $F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i + g\,c_{ijk} A_\mu{}^j A_\nu{}^k$　　page70 &「群論 / 別章 4 ゲージ相互作用 (5)、(7) 式」参照

この $\mathscr{L}_{kin}$ がゲージ変換で不変であることを示しておこう。

ある量 a があったとき、ゲージ変換を受けてできた量を a′ として δa = a′ − a とかくことにする。

すると上の $A_\mu{}^{i\prime}$ の計算は次の形になる。

$$\delta A_\mu{}^i = \beta^j A_\mu{}^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta^i$$

ここで $\delta F^i{}_{\mu\nu}$ を求めるために次を計算する。（c_{ijk} の完全反対称性や構造定数の公式を使う。）

$$\delta(\partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i) = \partial_\mu(\delta A_\nu{}^i) - \partial_\nu(\delta A_\mu{}^i)$$

$$= c_{ijk}\,\beta^j\,(\partial_\mu A_\nu{}^k - \partial_\nu A_\mu{}^k) + c_{ijk}\,((\partial_\mu\beta^j)A_\nu{}^k - (\partial_\nu\beta^j)A_\mu{}^k)$$

$$g\,c_{ijk}\,\delta(A_\mu{}^j\,A_\nu{}^k) = g\,c_{ijk}\,\delta(A_\mu{}^j)\,A_\nu{}^k + g\,c_{ijk}\,A_\mu{}^j\,\delta A_\nu{}^k$$

$$= g\,c_{ijk}\,\beta^l\,A_\mu{}^m\,c_{jlm}\,A_\nu{}^k + g\,c_{ijk}\,A_\mu{}^j\,\beta^l\,A_\nu{}^m\,c_{klm} - c_{ijk}\,((\partial_\mu\beta^j)\,A_\nu{}^k + (\partial_\nu\beta^k)\,A_\mu{}^j)$$

$$= g\,\beta^l\,A_\mu{}^j\,A_\nu{}^m\,(c_{ikm}\,c_{klj} + c_{ijk}\,c_{klm}) - c_{ijk}\,((\partial_\mu\beta^j)\,A_\nu{}^k - (\partial_\nu\beta^j)\,A_\mu{}^k)$$

ここで　$c_{ikm}\,c_{klj} + c_{ijk}\,c_{klm} = c_{imk}\,c_{kjl} + c_{ijk}\,c_{klm} = -\,c_{ilk}\,c_{kmj} = c_{ilk}\,c_{kjm}$

$$= g\,\beta^l\,c_{ilk}\,c_{kjm}\,A_\mu{}^j\,A_\nu{}^m - c_{ijk}\,((\partial_\mu\beta^j)\,A_\nu{}^k - (\partial_\nu\beta^j)\,A_\mu{}^k)$$

となるから

$$\delta F^i{}_{\mu\nu} = c_{ijk}\,\beta^j\,(\partial_\mu A_\nu{}^k - \partial_\nu A_\mu{}^k) + g\,\beta^l\,c_{ilk}\,c_{kjm}\,A_\mu{}^j\,A_\nu{}^m = c_{ijk}\,\beta^j\,F^k{}_{\mu\nu}$$

が得られる。

これから $F^i{}_{\mu\nu}\,F^{i\,\mu\nu}$ がゲージ不変であることは次のように c_{ijk} の完全反対称を用いて得られる。

$$F^i{}_{\mu\nu}\,F^{i\,\mu\nu} \longrightarrow (F^i{}_{\mu\nu} + c_{ijk}\,\beta^j\,F^k{}_{\mu\nu})\,(F^{i\,\mu\nu} + c_{ijk}\,\beta^j\,F^{k\,\mu\nu})$$

$$= F^i{}_{\mu\nu}\,F^{i\,\mu\nu} + c_{ijk}\,\beta^j\,(F^i{}_{\mu\nu}\,F^{k\,\mu\nu} + F^k{}_{\mu\nu}\,F^{i\,\mu\nu})$$

$$= F^i{}_{\mu\nu}\,F^{i\,\mu\nu} \qquad (c_{ijk} + c_{ikj} = 0 \text{ より})$$

これでゲージ場の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項がゲージ不変であることがわかったが、これに対してゲージ場の粒子の質量の項

$$\mathscr{L}_{\mathrm{mass}} = \frac{1}{2}\,M_{ij}{}^2\,A^{i\,\mu}\,A_\mu{}^j$$

はゲージ不変にならない。したがってゲージ不変を保つためにはゲージボーズ粒子は質量が0でなければならない。したがってゲージ粒子の力は遠達力であることになる。これは電磁場には都合がよいが、強い相互作用や弱い相互作用は遠達力ではないのでこのままでは具合が悪い。これを補正するのが Higgs モデルである。前回掲載の「自発的対称性の破れとヒッグス機構 / ヒッグス機構」参照

最後に、もう少しだけ一般論を続けておこう。

フェルミ粒子の場が n 個 $\psi_1, \cdots\cdots, \psi_n$ あり、また複素スカラー場が m 個 $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n$ あるとする。

n 次元の表現 ρ_ψ と m 次元の表現 ρ_φ とがあるときは

$$L_\psi{}^i = \rho_\psi(T^i), \quad L_\varphi{}^i = \rho_\varphi(T^i)$$

と定義し、ψ, φ についてのゲージ変換は

$$\psi_a \longrightarrow \exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}_\psi)_{ab}\,\psi_b = U_\psi(\boldsymbol{\beta})_{ab}\,\psi_b$$

$$\varphi_b \longrightarrow \exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}_\varphi)_{ab}\,\varphi_b = U_\varphi(\boldsymbol{\beta})_{ab}\,\varphi_b$$

の形となる。したがってこれによって導入される $A_{\psi\,\mu}, A_{\varphi\,\mu}, D_{\psi\,\mu}, D_{\varphi\,\mu}$ などすべて ψ と φ とを別々に扱うことになる。

さらに ψ についての変換がカイラル変換のときは

$$L_\psi{}^i = L_L{}^i\,P_L + L_R{}^i\,P_R$$

とすればよい。

このように ψ と φ とを分けたときのフェルミ粒子の場と複素スカラー場の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{kin}} = \bar{\psi}\,i\,D_\psi\,\psi + (D_\varphi{}^\mu\varphi)^\dagger\,D_{\varphi\,\mu}\varphi$$

となっていて、もちろんゲージ不変である。

スカラー場 φ_b が $\varphi_b = \varphi_b{}^\dagger$ をみたすとき、φ_b をエルミート・スカラー場という。複素スカラー場 φ は常に

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varphi_R + i\,\varphi_I) \qquad \text{R は実部、I は虚数部といった指標}$$

で φ_R と φ_I がエルミート・スカラー場であるように分解することができる。エルミート・スカラー場の方が便利なことが多い。

エルミート・スカラー場の場合の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項は

$$\mathscr{L}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\varphi_{b}\right)\left(\partial^{\mu}\varphi_{b}\right)$$

であり、したがってゲージ場を入れてからの運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項は次のものになる。

$$\mathscr{L}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\left(D^{\mu}\varphi_{b}\right)\left(D_{\mu}\varphi_{b}\right)$$