自発的対称性の破れとヒッグス機構

「ゲージ理論」でみてきたように、U(1) 対称性はラグランジアン $\mathcal{L} = (\varphi, \partial_\mu \varphi)$ が

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = e^{i\theta} \varphi(x) \qquad (1)$$

という形の変換のもとで不変であることを意味する。

θ が時空座標 x に依存しないとき、式 (1) は大域的に対称である。一方、もし θ が時空座標に依存する、つまり $\theta = \theta(x)$ なら、局所対称性を表わす。

さて、場の量子論では SU(2) のようなより複雑なユニタリ変換が現れ、$\varphi \to -\varphi$ のような別の型の変換のもとでも不変であるようなラグランジアンを持つこともできる。この型の対称性は自発的対称性の破れの概念を導入する際に使われる。

$\varphi \to -\varphi$ のもとで不変であるようなラグランジアンの例は (φ^4) 理論と呼ばれるラグランジアンである。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \qquad (2)$$

あきらかに場 φ がこのラグランジアンの中で偶数次のべき乗と偶数次の微分でしか現れないことにより、ラグランジアンは変換 $\varphi \to -\varphi$ のもとで不変である。

▌場の理論における対称性の破れ

ここではまず、真空状態は見かけ上基底状態だが、実際は対称性を破る真の基底状態、またはより低いエネルギーの真空状態が存在するということを見ていく。

真空とは場を持たない状態、すなわち $\varphi = 0$ である。$\varphi = 0$ がポテンシャルエネルギーが最低の状態と考えるかもしれない。しかし、$\varphi = 0$ を持つ状態が最小とは限らないことがわかる。

φ^4 理論のラグランジアン (2)　$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$　　φ は実スカラー場

このラグランジアンの運動エネルギー項は

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2$$

であり、ポテンシャルは

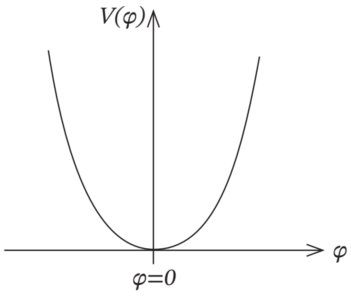
$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4$$

である。$V(\varphi)$ は下に有界でなければならないから $\lambda > 0$ とする。

これを微分すると、

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mu^2\varphi + \lambda\varphi^3 = \varphi(\mu^2 + \lambda\varphi^2)$$

これを 0 に等しいとすると最小値を得る。



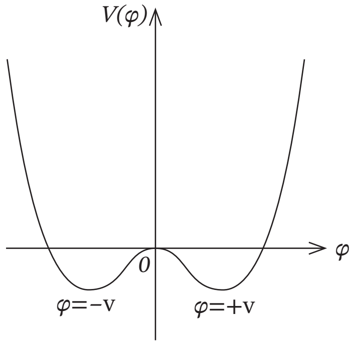
$\mu^2>0$ の場合のポテンシャル . 最小値は $\varphi=0$

1 つの極値は単純に

$$\varphi = 0$$

である。これは $\mu^2 > 0$ の場合が対応し、それは質量 μ のスカラー場を表わす（次のセクション参照）。φ^4 項は λ で表される結合定数を持つ場の自己相互作用を表わす。

基底状態が $\varphi = 0$ の点のとき、それは明らかにラグランジアンの対称性が $\varphi \to -\varphi$ で満たされ、自明である。



$\mu^2<0$ の場合のポテンシャル

別の最小値は

$$\mu^2 + \lambda\varphi^2 = 0$$

である。これは 2 つの可能な最小値

$$\varphi = \pm(-\mu^2/\lambda)^{1/2} = \pm v \qquad (4)$$

を与える。この場合、ば φ が実スカラーであるために $\mu^2 < 0$ の場合になっていなければならない。

この場合のラグランジアンにおいて、真の最小値は $\varphi = \pm v$ である。点 $\varphi = 0$ は不安定な点であり、したがってこの点についての摂動展開は収束しない。それと対比して $\varphi = \pm v$ の 1 つについての摂動展開は収束する。しかし対称性は破れている。そして $\varphi = +v$ と $\varphi = -v$ での最小点の 2 つの基底状態が存在する。

「対称性の自発的破れ」の一般的な定義

場の量についてある種の変換を行ったとき、系のラグランジアン密度 $L(x)$ が不変であったとする。このとき、この変換のもとで不変でないような演算子で、しかもその真空期待値が 0 でないようなものが存在した場合、上記の変換による系の対称性は自発的に破れているという。上の例では、$\langle\varphi\rangle_0 = \langle 0|\varphi(x)|0\rangle \neq 0$ となっている。

▍ラグランジアンの質量項

自発的対称性の破れが含む問題の主要課題はラグランジアンの質量項を見つけることである。これは通常は単純な方法で行うことができる。これを見るために、ポテンシャルが 2 乗のものをとりあげてみよう。これはクライン - ゴルドン方程式である。

このラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

である。クライン - ゴルドン方程式の場合、すでに場の量子 φ は質量 m をもつ粒子であることがわかっている。したがって、このラグランジアンを見ることにより質量項は

$$-\frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

であると認識する。ここで $m^2 > 0$ で m は関連する粒子の質量である。

ラグランジアンの質量項は場の 2 乗の項で、ある α で $-\frac{1}{2}\alpha^2\varphi^2$ となる形式の項である *。

※　$\alpha^2 > 0$ とするときラグランジアンの中で $-\frac{1}{2}\alpha^2\varphi^2$ となるものが質量項であり、符号を反転させたものは質量項にならない。したがって、φ の 2 次の項として $+\frac{1}{2}\alpha^2\varphi^2$ がラグランジアンに現れるとき、その場を表わす粒子の質量は 0 である。
ただし、自由空間におけるベクトル場 A^ν の場合、A^ν が従うクライン - ゴルドン型方程式 $\partial_\mu\partial^\mu A^\nu + m^2 A^\nu = 0$ を導くラグランジアンが $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ なので、この場合は $+\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ が質量項となる。

しかし、ラグランジアンから質量項を見極めるのはいつでも可能なことではない。多くのラグランジアンは何らかの方法で隠れた質量をもつ。

次のようなある架空のラグランジアンを考えてみる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \ln(1 - \alpha\varphi)$$

このラグランジアンに質量項は存在するだろうか？　場に関する 2 次の項が見当たらず、よってこの場合 $m = 0$ という結論に行きつくかもしれない。しかし、この式を詳しく見ると、そうでないことが明らかとなる。

級数展開してみると、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \ln(1 - \alpha\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi^2 - \frac{1}{3}\alpha^3\varphi^3 - O(\varphi^4)$$

$\alpha^2 > 0$ ととれば、このラグランジアンは質量 $m = \alpha$ の粒子を記述する。

したがって、与えられたラグランジアンが質量項を含むかどうか明らかでないときは、

・ポテンシャルを級数に展開する。
・場に関する 2 次の項を確認する。

を行えばよい。

例　$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - e^{\alpha\varphi}$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - 1 - \alpha\varphi - \frac{1}{2}\alpha^2\varphi^2 - \frac{1}{6}\alpha^3\varphi^3 + O(\varphi^4)$$　質量項 $-\frac{1}{2}\alpha^2\varphi^2$ を持つ。

例　$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - e^{\alpha^3\varphi^3}$

$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - 1 - \alpha^3 \varphi^3 - \frac{1}{2}\alpha^6 \varphi^6 - \frac{1}{6}\alpha^3 \varphi^3 - O(\varphi^9)$　　質量項を持たない（質量 0 の場）。

▌自発的対称性の破れと質量

先に見たラグランジアン (2)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda \varphi^4$$

ここでは $\mu^2 < 0$ の場合を考えるので、第 2 項は質量項ではない。

において、$\mu^2 < 0$ の場合はこのポテンシャルの真の基底状態または最小点では対称性が自発的に破れており、

$$\varphi = \pm(-\mu^2/\lambda)^{1/2} = \pm \mathrm{v}$$

によって与えられることを見てきた。

最小点は $\varphi = 0$ の点ではなく、$\varphi = \pm \mathrm{v}$ に位置する。ここでは $\varphi = +\mathrm{v}$ の場合を考え、このことを表わすために場をとり直す。

$$\varphi(x) = \mathrm{v} + \eta(x) \qquad (5)$$

ここでは $\eta(x)$ によって記述される右側の最小点 $+\mathrm{v}$ の周りの変動によって場を書いた。

次にこの新しい形を使ってラグランジアンを書き直す。v がただの数であることにより、運動エネルギー項は簡単に書き下せる。

$$\partial_\mu \varphi(x) = \partial_\mu(\mathrm{v} + \eta(x)) = \partial_\mu \eta(x)$$

さらに

$$\varphi^2 = (\mathrm{v} + \eta)^2 = \mathrm{v}^2 + 2\mathrm{v}\eta + \eta^2$$

$$\varphi^4 = (\mathrm{v} + \eta)^4 = \mathrm{v}^4 + 4\mathrm{v}^3\eta + 6\mathrm{v}^2\eta^2 + 4\mathrm{v}\eta^3 + \eta^4$$

これらを合わせるとラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\mathrm{v}^2 + 2\mathrm{v}\eta + \eta^2) - \frac{1}{4}\lambda(\mathrm{v}^4 + 4\mathrm{v}^3\eta + 6\mathrm{v}^2\eta^2 + 4\mathrm{v}\eta^3 + \eta^4)$$

となる。ここで v はただの数であり、ラグランジアンではすべての定数項は切り落とせる。したがって最終的にこのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \lambda \mathrm{v}^2 \eta^2 - \lambda \mathrm{v} \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 \qquad (6)$$

となる。場 η で書かれたラグランジアン (6) の質量項は $-\lambda \mathrm{v}^2 \eta^2$ である。　質量項がなかった場に、対称性の自発的破れによって（v 近傍の振動にずらすことで）質量がでてきた。

クライン - ゴルドン型の質量項 $-\frac{1}{2}m^2\varphi^2$ と比較すると、(6) における質量項は $m = (2\lambda)^{1/2}\mathrm{v}$ である。

ラグランジアンの他の項については、これらは場 $\eta(x)$ の自己相互作用を表わしている。

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2}_{\text{運動エネルギー}} - \underbrace{\lambda \mathrm{v}^2 \eta^2}_{\text{質量項}} - \underbrace{\lambda \mathrm{v} \eta^3}_{\text{自己相互作用}} - \underbrace{\frac{1}{4}\lambda \eta^4}_{\text{自己相互作用}}$$

▌ゴールドストーンボソン

「$\phi(x) \rightarrow -\phi(x)$ は不連続変換だが、連続変換のときは対称性の破れについてさらに次のような興味ある結果が導かれ、南部・ゴールドストンの定理と呼ばれている。

『ローレンツ変換や時空座標の平行移動の変換とは無関係な場の量に関する連続変換で、ラグランジアン密度が不変であり、しかも系に長距離力が存在しないという条件のもとでこの対称性が自発的に破れているならば、これに伴って、スピン 0、質量 0 の粒子が必ず存在することになる。』

なお、南部・ゴールドストンの粒子は、不連続変換の対称性が自発的に破れても現れない。これは、あくまでも、連続変換に関連して現れるものである。」

まず最初に 2 つの実場 φ_1 と φ_2 に関する場 φ を定義しよう（つまり、φ は複素場）。

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \qquad (7)$$

ここで考えるラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi + \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda(\varphi^\dagger \varphi)^2 \qquad (8)$$

ここでは $\mu^2 > 0$、$\lambda > 0$ とする（$\mu^2 \varphi^\dagger \varphi$ は質量項でないことに注意）

である。

$\varphi^{\dagger}\varphi=\frac{1}{2}(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)$ なのでラグランジアン (8) は

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2+\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2+\frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)-\frac{1}{4}\lambda(\varphi_1{}^4+\varphi_2{}^4)-\frac{1}{2}\lambda\varphi_1{}^2\varphi_2{}^2$$

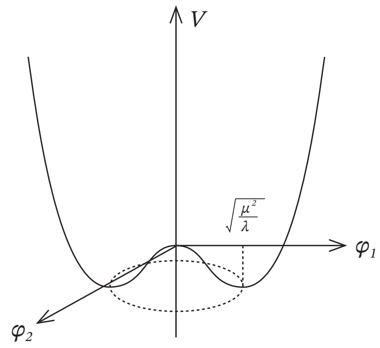
となる。ポテンシャルは

$$V=-\frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)+\frac{1}{4}\lambda(\varphi_1{}^4+\varphi_2{}^4)+\frac{1}{2}\lambda\varphi_1{}^2\varphi_2{}^2$$

$$=-\frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)+\frac{1}{4}\lambda(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)^2$$

$$=\frac{\lambda}{4}((\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)-\frac{\mu^2}{\lambda})^2-\frac{\mu^2}{4\lambda}$$

である。



このラグランジアンは (φ_1,φ_2) 対称性を持ち、それは (φ_1,φ_2) 空間の回転（連続変換）として記述できる。これは次の形の行列で書くことができる。

$$\begin{pmatrix}\varphi'_1\\ \varphi'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

すなわち

$$\varphi'_1=\cos\alpha\,\varphi_1+\sin\alpha\,\varphi_2$$

$$\varphi'_2=-\sin\alpha\,\varphi_1+\cos\alpha\,\varphi_2$$

で不変である。ポテンシャルの最小は

$$\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2=\frac{\mu^2}{\lambda}$$

を満たす円周上である。

ここでは最小点を

$$\mathrm{v}_1=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\qquad \mathrm{v}_2=0\qquad (9)$$

に選ぶ。（φ_1 と φ_2 の最小点をそれぞれ v_1, v_2 とする。真空期待値（最小点）の位相を選んだ時点で対称性は破れるが、ここを拠点とした新たな場を設定する。）

場を書き直そう。今回は (9) によって与えられる最小点からの変化である 2 つの場 χ と ψ が必要となる。

$$\chi=\varphi_1-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\qquad \psi=\varphi_2\qquad (10)$$

ととると

$$\varphi=((\chi+\mu/\sqrt{\lambda})+i\,\psi)/\sqrt{2}$$

を得る。

座標系の変更は $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix}\chi\\ \psi\end{pmatrix}$ へ座標系を右に $\mu/\sqrt{\lambda}$ 移動したものである。言い換えれば、原点を実際のポテンシャルの最小点に移動したことになる。すると、

$$\varphi_1{}^2=(\chi+\mu/\sqrt{\lambda})^2=\chi^2+2\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\chi+\frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$\varphi_1{}^4=(\chi+\mu/\sqrt{\lambda})^4=\chi^4+4\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\chi^3+6\frac{\mu^2}{\lambda}\chi^2+4\frac{\mu^3}{\sqrt{\lambda^3}}\chi+\frac{\mu^4}{\lambda^2}$$

$$\varphi_2=\psi$$

$$\frac{1}{2}\lambda\varphi_1{}^2\varphi_2{}^2=\frac{1}{2}\lambda(\chi^2\psi^2+2\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\chi\psi^2+\frac{\mu^2}{\lambda}\psi^2)$$

質量項を得るためには相互作用項（$n>2$ のときの φ^n 等の部分）を無視し、自由ラグランジアンを見る必要がある。また定数はラグランジアンから導かれる場の方程式に寄与しないので切り捨てる。2 次の項を除いてすべて切り捨てると、自由部分のポテンシャルは、

$$V_{free}=-\frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2)_{free}+\frac{1}{4}\lambda(\varphi_1{}^4+\varphi_2{}^4)_{free}+\frac{1}{2}\lambda(\varphi_1{}^2\varphi_2{}^2)_{free}$$

$$= -\frac{1}{2}\mu^2(\chi^2+\psi^2) + \frac{1}{4}\lambda(6\frac{\mu^2}{\lambda}\chi^2) + \frac{1}{2}\lambda(\frac{\mu^2}{\lambda}\psi^2)$$

$$= \mu^2\chi^2$$

すべてを一緒にすると、ラグランジアンの自由または非相互作用部分は

$$\mathcal{L}_{free} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\psi)^2 - \mu^2\chi^2$$

となる。これによりラグランジアン (8) の (7) 式の複素場に関する (φ_1, φ_2) 空間の回転（つまり、連続変換）によって与えられる U(1) 対称性の破れは、場 χ を質量 $\sqrt{2}\,\mu$、そして ψ を質量 0 の場として与える。

円周上の最小点で $\mathrm{v}_1 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ と選んだから、場 χ の質量は $\sqrt{2}\,\mu = \sqrt{2\lambda}\,\mathrm{v}_1$ である。

この例はスカラー場の特別な場合である。そのためこれらの場に関連する粒子はスピン 0 粒子である。対称性の破れに伴う質量 0 のスピン 0 粒子が現れるとき、それはゴールド - ストーン・ボソンと呼ばれる。この例では、ψ がそれにあたる。

ここでの議論では、ψ が質量ゼロのゴールドストーンボソンを表すことを直観的に理解しやすいように、

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\,\varphi_2) \qquad \chi = \varphi_1 - \mathrm{v} \qquad \psi = \varphi_2 \qquad \mathrm{v} = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{v} + \chi + i\,\psi)$$

としたが、別の変換形

$$\varphi \to \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{v}+\chi)\,e^{i\,\psi/\mathrm{v}}$$　　χ がヒッグス粒子場、ψ がゴールド - ストーン・ボソン場

の様に置き換えても自由度は変わらず、数学的には同等である。この場合 ψ は位相場と呼ばれる。ψ の量子励起エネルギーが、v に比べて小さければ指数関数を展開して

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{v}+\chi)\,e^{i\,\psi/\mathrm{v}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{v}+\chi)(1+i\,\psi/\mathrm{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{v}+\chi+i\,\psi) + O(1/\mathrm{v})$$

となり最初の式に還元する。位相場であっても安定点近傍の微小振動は、やはり調和振動子の集合体であり、量子化により粒子像が成り立つことに変わりはない。この形は次のヒッグス機構を考慮する際、利用することになる。

「南部・ゴールドストンの定理」を再確認しておこう。

ローレンツ変換や時空座標の平行移動の変換とは無関係な場の量に関する連続変換で、ラグランジアン密度が不変であり、しかも系に長距離力が存在しないという条件のもとでこの対称性が自発的に破れているならば、これに伴って、スピン 0、質量 0 の粒子が必ず存在することになる。

（上の例では、この定理の証明をしているわけではないが、言わんとしていることの説明にはなっただろう。）

▌ヒッグス機構

ある無限小変換で対称性の自発的な破れが起こったとき、この変換がゲージ化されて対応するゲージ場（長距離力）が共存していたとしたら、上の定理はどうなるであろうか。そのときには、南部・ゴールドストン粒子は消えてしまって、かわってゲージ場に質量項が現れるということが起こる。このメカニズムは、ヒッグス機構とよばれる。

前節では 2 つの実成分に関する複素場の場合を考えることによって、自発的対称性の破れを考察した。そこでは単純化のため大域的ゲージ不変性を考えた。いまから、この概念をゲージ場 A_μ を含む U(1) 変換の下での局所ゲージ不変性を必要とする状況に拡張してみる。

ここでは質量 0 のゲージ場 A_μ から始め、対称性の破れが質量のあるベクトル場になるという結果を導くことを示す。電弱理論においては、この型の手続きが質量のあるベクトルボソン $W^\pm$ と Z^0 の発生与えることになる。

簡単のため、スカラー場 φ の U(1) ゲージ理論を考える。

(1) 式で述べたように、U(1) 対称性は、ラグランジアン $\mathcal{L} = (\varphi, \partial_\mu\varphi)$ が

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = e^{i\,\theta}\,\varphi(x)$$

という形の変換のもとで不変であることを意味する。
大域的ゲージ変換では、θ はスカラー、つまりただの数で時空の関数ではなかった。しかしいま、$\theta \to \theta(x)$ と置いて、この概念を局所ゲージ変換に拡張する。
ラグランジアンはこの変換のもとでも不変であるべきであると要請する。すなわち、

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x) = e^{i\,\theta(x)}\,\varphi(x) \qquad (11)$$

という変換のもとで不変であるべきである。
局所ゲージ変換での不変性は、「ゲージ理論」でみたようにゲージ場の導入を要求する。
このゲージ場の変換は、次式であらわせた。（このあたりは、「ゲージ理論」参照）

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q}\,\partial_\mu \theta(x) \qquad (12)$$

これは、(11) が $\varphi'(x) = e^{-i\theta(x)}\varphi(x)$ だと $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x)$ 、　$\varphi'(x) = e^{-i\,q\,\theta(x)}\varphi(x)$ にしておくと $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)$

また、局所ゲージ不変性の要請がラグランジアンの不変性を回復するために共変微分を使うことを強制する。
これまではラグランジアンの中で通常の微分を使ってきた。すなわち、ラグランジアンの運動エネルギー項は

$$\partial_\mu\varphi^\dagger\,\partial^\mu\varphi$$

の形をしていた。ラグランジアンのゲージ不変性を得るためには、式 (11) および式 (12) を考えると、共変微分を使う必要がある。この共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - i\,q\,A_\mu \qquad (13)$$

である。この定義によって、ラグランジアンは

$$\mathscr{L} = (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi - V(\varphi^\dagger\varphi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (14)$$

となる。
まとめると、このラグランジアンはスカラー場 φ と質量 0 のゲージ場 A_μ を含んだ理論を記述する。この理論のゲージ場に関して、$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ のような項は運動エネルギー項を表わす。電磁気学との類似性により、次の定義が使われる。

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (15)$$

もしゲージ場に質量項が存在すると、スカラー場の 2 次質量項との類似性でゲージ場の縮約 $A_\mu A^\mu$ が現れることになる。式 (14) によって与えられるラグランジアンはこの項を持たないので、このゲージ場の質量は 0 である。ところが、すぐ見るように、ある型の対称性の破れはゲージ場 A_μ に質量を獲得させる。これがヒッグス機構の真髄である。

式 (14) のポテンシャルとして

$$V(\varphi^\dagger\varphi) = \lambda\,(\varphi^\dagger\varphi - v^2)^2 \qquad \lambda = \frac{\mu^2}{2v^2} \qquad (16)$$

(8) 式に合わせて $\mu^2\varphi^\dagger\varphi$ が出てくるようにしている

を考える。
ポテンシャルの最小点は

$$|\varphi|^2 = v^2 \qquad (17)$$

を満たす位置にある。ここで、v はある実数である。
次のように局所ゲージ変換 (11) も、同じ最小点を与える。

$$\varphi'^\dagger\varphi' = (\varphi^\dagger e^{-i\,\theta(x)})(e^{i\,\theta(x)}\varphi) = \varphi^\dagger\varphi = |\varphi|^2$$

ここで、真空期待値は (17) より

$$\langle\varphi\rangle_0 = v\,e^{i\,\alpha}$$

（前節の複素場と同様、無限の真空状態（連続した最小点）が存在する。）

と表せるが、真空期待値の位相を選んだ時点で対称性が破れる。ここでは位相を $\alpha = 0$ と選び、ここに軸を移した新たな振動を考える。
この真空からのゆらぎを（前節の最後に述べた方法を利用する）

$$\varphi(x) = (v + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x))\,e^{i\,\pi(x)} \qquad (18)$$

v はただの数、$h(x)$ は実場（ヒッグス場）

としたとき、ラグランジアン (14) は次のようになる。（ただの数は、ラグランジアンから落とせる。）

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2\tilde{A}^{\mu}\tilde{A}_{\mu} + qMh\,\tilde{A}^{\mu}\tilde{A}_{\mu} + \frac{q^2}{2}h^2\tilde{A}^{\mu}\tilde{A}_{\mu} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}h\,\partial^{\mu}h - \frac{m^2}{2}h^2 - m\sqrt{\frac{\lambda}{2}}h^3 - \frac{\lambda}{4}h^4 \qquad (19)$$

ただし、$\tilde{A}_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \frac{1}{q}\partial_{\mu}\pi(x)$　再定義されたゲージ場（ゴールド - ストーン場 π がゲージ場に吸収された）

$$M = \sqrt{2}\,q\,\mathrm{v} \qquad m = 2\mathrm{v}\sqrt{\lambda} = \sqrt{2}\,\mu$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\tilde{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\tilde{A}_{\mu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} = F_{\mu\nu}$$

具体的な計算は、http://www.yam-web.net/science-note/「量子力学 補論 3-1 自発的対称性の破れとヒッグス機構 / ヒッグス機構」参照

再定義されたゲージ場の形 $\tilde{A}_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \frac{1}{q}\partial_{\mu}\pi(x)$ をみてみると、ちょうどゲージ変換 $\varphi(x) \to \varphi(x)\,e^{-i\pi(x)}$ を施したような形になっている。$\varphi(x) = (\mathrm{v} + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x))\,e^{i\pi(x)}$ なので $\varphi(x) \to \mathrm{v} + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x)$（実場）という変換に相当する。たしかにこの変換で、(14) は (19) の形になることがすぐわかる。

このラグランジアン (19) はいくつかの成分を持っている。
まずヒッグス場 $h(x)$ を含むラグランジアンの自由部分である。すなわち、

$$\mathscr{L}^{h}_{free} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}h\,\partial^{\mu}h - \frac{m^2}{2}h^2$$

これはこれまで見慣れたスカラー場 $h(x)$ のクライン - ゴルドン方程式型ラグランジアンで、そのスカラー場 $h(x)$ の質量は $m = \sqrt{2}\,\mu$ である。したがって、この例ではヒッグス場がスカラー場で質量 $m = \sqrt{2}\,\mu$ のスピン 0 ボソンとなっている。

次に、再定義されたゲージ場の自由ラグランジアンは

$$\mathscr{L}^{B}_{free} = -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2\tilde{A}^{\mu}\tilde{A}_{\mu}$$

によって与えられる。これは注目すべき結果である。質量項を持っていることがわかる *。対称性が破られる前には質量ゼロであった。対称性の破れがベクトルボソンに質量 M を発生させることがわかる。

※　よくみると質量項が逆符号のようにみえるが、自由空間における A^{ν} が従うクライン - ゴルドン型方程式 $\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} + m^2A^{\nu} = 0$ を導くラグランジアンが $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2A_{\mu}A^{\mu}$ なので、この場合は正しい。

ラグランジアンの残りの項は相互作用項である。
$\pi(x)$ は再定義されたベクトル場に吸収されてラグランジアンに出てこない（南部・ゴールドストーン粒子は現れない）。

まとめ　　*https://ja.wikipedia.org/wiki/* ヒッグス機構

ゲージ対称性を持つ理論において、ラグランジアンの中にゲージ場の質量項は入ることが出来ないため、ゲージ場の裸の質量は 0 である。しかしながら、ヒッグス機構はゲージ場とスカラー場の相互作用によって、低エネルギーにおいてゲージ粒子に質量を与えることが出来る。 つまり、もしヒッグス機構が起こっていれば、従来は困難とされたゲージ粒子の質量に対して、物理学的に整合性を保った、合理的な説明を与えることができる。
通常、系の対称性が破れると南部・ゴールドストーン粒子が生じるが、このヒッグス機構が起こるときには物理的な南部・ゴールドストーン粒子は現れず、その自由度はゲージ場の縦波成分として吸収されてゲージ場は質量を持ったベクトル粒子となる。 この機構において系の対称性を破るために導入される場はヒッグス場と呼ばれる。ヒッグス場はゲージ群の下で非自明な表現（チャージ）をもち、ゲージ理論に従ってゲージ相互作用をする。 ヒッグス場が真空期待値をもつと対称性が破れ、ヒッグス場とのゲージ相互作用を通じてゲージ場は質量を獲得する。対称性が破れた後に残る場が量子化されて得られる粒子がヒッグス粒子である。