量子電磁力学（QED : quantum electrodynamics）U(1) ゲージ場

ゲージ理論は、まず大域的変換での対称性（作用 S の不変性、保存性）を措定した上で、これを局所的変換に移行したときなおかつ対称性を保つためにはある種の場の導入が不可欠であるということだった。つまり、対称性を維持するという要請からは、この局所変換に対して不変性を保つための新たな場＝ゲージ場の存在が求められるということである。ここでの局所変換は、ゲージ場を伴う局所ゲージ変換になる（物質場の局所位相変換とゲージ場の変換の同時変換によって、不変性を回復するというシナリオ。このとき、作用の微分は共変微分によって書き換えられなければならない)。

ゲージ粒子：ゲージ粒子とは、素粒子物理学において、ゲージ相互作用を媒介するボース粒子の総称である。 特にその相互作用がゲージ理論で記述されている素粒子間において、（仮想粒子として）ゲージ粒子の交換により力が生じる。 標準模型においては、電磁相互作用を媒介する光子、弱い相互作用を伝えるウィークボソン、強い相互作用を伝えるグルーオンの 3 種類がある。 また重力相互作用もゲージ理論で記述されていると考えられており、これを伝える重力子がある。
https://ja.wikipedia.org/wiki/ ゲージ粒子

Maxwell の電磁場理論について

まず、従来の電磁場理論について概観しなおしておこう。

Maxwell 理論の作用積分は、

$$S=\int \mathscr{L}\, d^4x=\int [\,-\frac{1}{4}\,(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\,(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\,]\,d^4x \qquad ①$$

電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ に関する変分

$$\delta S=\int [\,-\partial_\mu\,\delta A_\nu\,(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\,]\,d^4x=\int [\,\delta A_\nu\,\partial_\mu\,(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\,]\,d^4x=0$$

から、Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)=0 \qquad ただし、F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu \qquad ②$$

が得られる。

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{E}=(\,F_{01}\,,F_{02}\,,F_{03}\,),\ \ \boldsymbol{B}=(\,-F_{23}\,,-F_{31}\,,-F_{12}\,)$$

と定義され、Maxwell の方程式 ② $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)=0$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\,,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=\ 0$$

を与える。

さらに、$F^{\mu\nu}$ の定義式 $F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ から

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=\ 0\,,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

が恒等式として得られる。

①の作用積分およびそれから導かれる方程式②は、

$$x'^\mu=\ \Lambda^\mu{}_\nu\,x^\nu+a^\mu$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$, a^μ は定数。$\Lambda^\mu{}_\nu$ はローレンツ変換で、a^μ は座標系の原点のとり方の自由度に対応するもの。

$$A'^\mu(x')\equiv\Lambda^\mu{}_\nu\,A^\nu(x)$$

で定義されるポアンカレ変換のもとで不変である。

①で定義される作用積分は、$\omega(x)$ を任意の関数として次のゲージ変換

$$A_\mu(x)\quad\rightarrow\quad A_\mu'(x)\equiv A_\mu(x)+\partial_\mu\omega(x)$$

のもとで不変である。すなわち、

$$F_{\mu\nu}'=\partial_\mu(A_\nu+\partial_\nu\omega)-\partial_\nu(A_\mu+\partial_\mu\omega)=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

となる。$\omega(x)$ を適当に選ぶと、電磁ポテンシャル A'^μ に Lorentz 条件（あるいは Landau ゲージ）

$$\partial_\mu A'^\mu(x)=\partial_\mu A^\mu(x)+\partial_\mu\partial^\mu\omega(x)=\partial_\mu A^\mu(x)+\Box\omega(x)=0$$

を課すことが可能となる。

ここで、電磁場を記述するために、このような自由度をもった電磁ポテンシャル A_μ からはじめる必要があるのか、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ だけで十分ではないかという疑問が起こる。しかし、ゲージ場 A_μ のもつ物理的意味については次の

Aharonov–Bohm 効果によって明らかとなる。

【Aharonov–Bohm 効果】

ゲージ変換によって現れるゲージ関数は、ゲージ変換によって得られた新たな電磁ポテンシャルの内容を含んでいる。特に、磁場のないような系を考えると、磁場はベクトルポテンシャルの回転によって与えられるので、この場合にはベクトルポテンシャルはゲージ関数の勾配によって与えられる。従って、磁場のない系におけるゲージ関数はベクトルポテンシャルの線積分によって表される。ここで、異なる経路を通る粒子に対する波動関数を考えると、ゲージ関数はそれらの経路に依存するから、はじめにそれぞれの波動関数の位相が揃っているものとすれば、それぞれの波動関数の間には経路上のベクトルポテンシャルに依存した位相差が生じることになる。重ね合わせの原理によって、系全体の波動関数はそれぞれの経路を通る波動関数の足し合わせとして表されるから、経路が重なり合う場所においては波動関数の干渉が生じる。これは実際に観測され得ることであり、量子力学に特有な現象である。このような現象をアハラノフ＝ボーム効果と呼ぶ。(Wikipedia「アハラノフ＝ボーム効果」)

外村彰：電子通信学会誌（2000 年）
外村彰氏による「電子波で見る電磁界分布（ベクトルポテンシャルを感じる電子波）」は、超伝導体で囲んだリング状磁石の近傍を通る電子波がベクトルポテンシャルの影響で干渉するという実験。

量子電磁力学（Maxwell-Dirac 理論）

ディラック場のラグランジアン密度は次のようになる。

$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi$　　①

$\psi(x)$ は 4 成分をもつ場であり、$\bar{\psi}(x) \equiv \psi(x)^{\dagger}\gamma^{0}$ と定義される。

パウリ行列を用いると、$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$　$\gamma^{k} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$　$k = 1, 2, 3$

時間成分 γ^{0} はエルミート、空間成分 γ^{k} は反エルミート。

$\gamma^{0\dagger} = \gamma^{0}$　　$\gamma^{k\dagger} = -\gamma^{k}$

また、その間の交換関係は、

$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}$　となる。　$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　ミンコフスキー計量

ディラック場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は、U(1) 群をなす位相変換 $\psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x)$, $\bar{\psi}'(x) = e^{-i\theta}\bar{\psi}(x)$ のもとで不変である。しかし、この変換の位相パラメーター θ は全く x^{μ} に依存しない定数であり、それは、これらの複素場の位相を全宇宙、無限の過去から未来まで、一斉にまわすことを意味している。このような大局的変換は不自然であり、むしろ位相パラメーター θ が任意の x 依存性をもつ局所的位相変換

$\psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x)$, $\bar{\psi}'(x) = e^{-i\theta(x)}\bar{\psi}(x)$　　②

のほうが自然であると考え、そのもとでの不変性を理論は先験的にもつべきであると要求するのがゲージ理論の立場である。このゲージ原理の要請は、言い換えれば、場の値（複素数）を測る座標軸の設定が時空の各点で独立に行えるべきであると考えるのに等しい。

しかし、θ が x に依存するようになると、微分を含む運動項はもはや不変ではなくなる。すなわち、場の微分 $\partial_{\mu}\psi(x)$ の変換には、

$\partial_{\mu}\psi(x) \rightarrow \partial_{\mu}\psi'(x) = \partial_{\mu}(e^{i\theta(x)}\psi(x)) = i(\partial_{\mu}\theta(x))e^{i\theta(x)}\psi(x) + e^{i\theta(x)}\partial_{\mu}\psi(x)$

のように、$\partial_{\mu}\theta(x)$ の項が現れ、大局的変換の場合のような斉次の変換 $\partial_{\mu}\psi \rightarrow e^{i\theta}\partial_{\mu}\psi$ にならない。

このような斉次の変換をする量をつくる微分を共変微分と呼び、その際、ゲージ場（ベクトル場 $A_{\mu}(x)$）の導入が必要となるのである。　前回の「ゲージ理論」参照

すなわち、共変微分 D_{μ} を

$D_{\mu}\psi(x) \equiv (\partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x))\psi(x)$　　③

で定義し、ゲージ場の変換を

$$A_\mu(x) \ \to\ A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\,\partial_\mu\theta(x) \qquad ④$$

とする。すると、共変微分の変換は

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi(x))' &= (\partial_\mu - i\,e\,A'_\mu(x))\psi'(x)\\ &= i\,(\partial_\mu\theta(x))\,e^{i\,\theta(x)}\,\psi(x) + e^{i\,\theta(x)}\,\partial_\mu\psi(x) - i\,(e\,A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x))\,e^{i\,\theta(x)}\,\psi(x)\\ &= e^{i\,\theta(x)}\,(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu(x))\psi(x)\\ &= e^{i\,\theta(x)}\,D_\mu\psi(x)\end{aligned}$$

と、斉次の位相変換となる。

ψ の物質場の局所位相変換②とゲージ場の変換④とをあわせて局所（U(1)）ゲージ変換、あるいは単にゲージ変換と呼ぶ。

共変微分は、したがって、大局的変換の場合と同じ斉次位相変換となるので、大局的位相変換で不変なラグランジアンは、その中の微分 ∂_μ を共変微分 D_μ に置き換えさえすれば、局所ゲージ不変なラグランジアンとなる。

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}\,[\,i\,\gamma^\mu\,(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu) - m\,]\,\psi \qquad ⑤$$

すなわち、ゲージ原理の要請により、ゲージ場 $A_\mu(x)$ と物質場 ψ との相互作用の仕方が決まったのである。

ゲージ場自身の運動項もゲージ不変性の要求で決まる。ゲージ場の 1 階微分を含み、ゲージ変換④で不変な量はあきらかに

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad ⑥$$

で、「場の強さ」と呼ばれる。したがって、ゲージ場の運動項は、

$$\mathscr{L}_{\text{ゲージ場}} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \qquad ⑦$$

で与えられる。

とくに、Dirac 場 ψ が電子、ゲージ場 A_μ が電磁場のとき、⑤＋⑦の

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\,(\,i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m\,)\,\psi + e\,A_\mu\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi$$

で記述される系の量子力学は、量子電磁気学（QED : quantum electrodynamics）と呼ばれる。