ゲージ理論

厳密な議論は、後編の「ゲージ理論とリー代数」を参照

現在素粒子理論で扱われる理論は殆どがゲージ理論である。電磁相互作用は QED、また弱い力も合わせた弱電磁相互作用の理論は Weinberg-Salam 理論というゲージ理論である。強い相互作用の理論である QCD もゲージ理論の一つである。さらに、一般相対性理論の重力理論もゲージ理論の一つである。

アインシュタインの一般相対性理論では、長さ、時間の基準といったものが、時空の位置によって変わってくる。これをきめるのがメトリック g_{ij} であった。時空ベクトルの微小平行移動もこの g_{ij} によって表せるようになり、すなわち、微分もこれを含む形となる。

これと同じことを物質にも考えようというのである。物質場 ϕ をはかるものさしといったものが、時空の位置によって変わるとするのである。すると、この ϕ の微小平行移動は、あるゲージ場 $\boldsymbol{A}$（ちょうど重力場 g_{ij} のようなもの）がかかわるものとして表されるようになる。また、この $\boldsymbol{A}$ によって、ϕ の内部空間の曲率も定まるのである。

重力場 g_{ij} のもとでは、時空ベクトルを平行移動させながらもとの位置に戻したとき、このベクトルは必ずしももとのものとは重ならなくなるが、ϕ を平行移動させていったときも同じようなことがおこる（すなわち、道すじによって異なる)。つまり、ϕ の微小平行移動をどのようにあらわすのかが問題となる。

準備 - 内部空間の曲率と共変微分

粒子の場を、$\phi_a(\boldsymbol{r})$ と書くことにする。ここで指標 a（$= 1, 2, \cdots\cdots, N$）は、粒子の内部空間の座標に対応するものである。

$\phi_a(\boldsymbol{r})$ をそのまま $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ に平行移動して、点 $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ に用意されているゲージで計られた場を $\phi_a(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})_{//}$ と書くことにする。そしてその道すじは、$\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ までの最短距離をとるとするのである。

ここで、$\Delta\boldsymbol{r}$ は十分小さいと考えているので、平行移動による差は $\phi_a(\boldsymbol{r})$ に線形であり、$\Delta\boldsymbol{r}$ に比例していると考えるのが自然だろう。

すると、$\phi_a(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})_{//} = \phi_a(\boldsymbol{r}) - \sum_b \boldsymbol{A}_{ab}(\boldsymbol{r})\cdot\Delta\boldsymbol{r}\ \phi_b(\boldsymbol{r})$ と表わされる。(仮定)

一般相対性理論で言えば、平行移動 $dV_j = \Gamma^i{}_{jk} V_i\, dx^k$ が対応している。$\Gamma^i{}_{jk}$ はクリストッフェル記号

曲率の定義

点 $\boldsymbol{r}$ で接平面内に 1 つの方向を選ぶ。次に、点 $\boldsymbol{r}$ から出発して十分小さな面積 ΔS をもつ面要素の周辺に沿って、その方向を平行移動してもとの点 $\boldsymbol{r}$ に戻ってきたときの方向の ΔS に関する変化率が曲率である。

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\phi(\boldsymbol{r})\oint_{\partial\Delta S}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}$$
$$= -\phi(\boldsymbol{r})\int_{\Delta S}\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\,dS$$

したがって、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が点 $\boldsymbol{r}$ の内部空間の曲率であるといえる。

内部空間が多次元の場合

$$\boldsymbol{F}_{ab}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{A}_{ab}(\boldsymbol{r}) + \sum_c \boldsymbol{A}_{ac}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{A}_{cb}(\boldsymbol{r})$$

さらに時空間の次元も一般化して、任意の次元で以上の考察をくり返すと、曲率は時空間における反対称テンソルであることが容易に導かれる。

$$F_{\mu\nu ab}(x) = \partial_\mu A_{\nu ab}(x) - \partial_\nu A_{\mu ab}(x) + \sum_c \left(A_{\mu ac}(x)A_{\nu cb}(x) - A_{\nu ac}(x)A_{\mu cb}(x)\right)$$

一般相対性理論だと曲率テンソル $R^i{}_{jkl} = \dfrac{\partial\Gamma^i{}_{jl}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial\Gamma^i{}_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^m{}_{jl}\Gamma^i{}_{mk} - \Gamma^m{}_{jk}\Gamma^i{}_{ml}$

この式で内部空間が 1 次元の場合、第３項、第４項は相殺して０となり、４元ベクトル・ポテンシャル A_μ と電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ の関係を与えるものとなっていることがわかる。

すなわち、$\partial_\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x)$ は電荷をもった物質と荷電内部空間の曲率を規定するゲージ場の相互関係を与える式の一部であることがわかる。

微分算の変更（共変微分）

$$D_\mu \phi_a(x) = \lim_{\Delta x_\mu \to 0} \frac{\phi_a(x+\Delta x) - \phi_a(x+\Delta x)//}{\Delta x_\mu}$$

$$= \partial_\mu \phi_a(x) + \sum_b A_{\mu\, ab}(x)\phi_b(x)$$

一般相対性理論では $V_{i:k} = \frac{\partial V_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik} V_j$

電磁場の方程式 $\partial_\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x)$ も、

$D_\mu F_{\mu\nu}(x) = j_\nu(x)$ と書き直さなければならない。　一般相対性理論では $\mathrm{F}^{ij}{}_{:j} = -\frac{4\pi}{c} j^i$

一般には、

$$\partial_\mu F_{\mu\nu\, ab} + \sum_c \underbrace{(A_{\mu\, ac} F_{\mu\nu\, cb} - F_{\mu\nu\, ac} A_{\mu\, cb})}_{\text{内部空間が 1 次元の場合は 0 となる}} = j_{\nu\, ab}$$

対称性とゲージ場（ゲージ化のおおまかな流れ）

ゲージ理論で重要になるのが、「対称性」という概念である。一般にある場の変換の下で作用が不変な場合、それを理論の対称性と呼ぶ。

たとえば、自由複素スカラー場の作用は

$$S_0 = \int d^4x\,(-\partial_\mu\phi^* \partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi)$$

である。この作用は場の位相変換

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{i\theta}\phi(x)$$

について不変である。ここで θ は、座標によらないパラメータである。このように、変換が座標によらないような変換に関する不変性を大域的対称性と呼ぶ。

この対称性のパラメータ θ を座標の関数にまで拡張した場合（すなわち、$\theta(x)$ とした場合）、局所ゲージ対称性と呼ばれる。このパラメータによる変換のもとでは、もはや作用 S_0 は不変ではないが、ゲージ場と呼ばれるベクトル場を導入することによって不変性を回復できる。

このように Global な対称性を Local な対称性にまで拡張するプロセスを対称性のゲージ化と呼ぶ。

一般相対性理論では、特殊相対性理論のようにミンコフスキー時空の慣性座標系に対応するような大域の座標系は存在しない。そのかわり、場所によって物差しが変わる局所座標系がすべて同等の立場をもっており、この下で物理法則はいかなる座標変換を行ってもその表現の形が保たれるように（＝対称性）、共変性をもったテンソル方程式として書かれなければならない。

対称性は、数学では主に「群論」で扱われる。とりわけ連続的変換を扱う場合は、リー群によって記述される。

U(1) ゲージ理論（可換群）

$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{ie\chi(x)}\psi(x)$（位相を各点で独立にシフトさせる局所変換）なるゲージ変換で、物理的内容が不変であるとする。

点 x の量 $\psi(x)$ を $x + dx$ に平行移動した結果を $\psi(x) + \delta\psi(x)$ と書くことにする。

このとき、dx は十分小さいと考えているので、$\delta\psi(x)$ は $\psi(x)$ に線形であり、dx に比例していると考えるのが自然である。すなわち、$B_\mu(x)$ があって（各点での ψ をはかる物差しのようなもの）、

$$\delta\psi(x) = i\, B_\mu(x)\, dx^\mu\, \psi(x)$$

一般相対性理論で言えば、平行移動 $dV_j = \Gamma^i{}_{jk} V_i\, dx^k$

と仮定する。（各点での ψ をはかる物指しのちがいからくる移動による変化）

ただし、この移動に際して、ψ の長さ $\psi^*\psi$ が保存するものとする。このとき、B_μ は実関数となる。

上のゲージ変換で、この B_μ はどのように変換されるであろうか。

$$(\psi(x) + \delta\psi(x))' = e^{ie\chi(x+dx)}(\psi(x) + \delta\psi(x))$$

左辺 $= \psi'(x) + \delta\psi'(x) = (1 + i\,B'_\mu(x)\,dx^\mu)\,\psi'(x) = (1 + i\,B'_\mu(x)\,dx^\mu)\,e^{ie\chi(x)}\,\psi(x)$

右辺 $= e^{ie\chi(x+dx)}(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)\,\psi(x) = e^{ie(\chi(x) + \partial_\mu\chi(x)dx^\mu)}(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)\,\psi(x)$

等値をとると、$(1 + i\,B'_\mu(x)\,dx^\mu)\,e^{ie\chi(x)}\,\psi(x) = e^{ie(\chi(x) + \partial_\mu\chi(x)dx^\mu)}(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)\,\psi(x)$

$$1 + i\,B'_\mu(x)\,dx^\mu = e^{ie\,\partial_\mu\chi(x)dx^\mu}(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)$$

$$= (1 + ie\,\partial_\mu\chi(x)dx^\mu)(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)$$

$$= 1 + ie\,\partial_\mu\chi(x)dx^\mu + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu$$

$dxdx$ の項は切り捨てる

$$B'_\mu(x) = B_\mu(x) + e\,\partial_\mu\chi(x)$$

$B_\mu = e\,A_\mu$ とおくと、$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$

A_μ は、点 x と点 $x + dx$ の量の間の関係をつける量として登場しているので接続（connection）とも呼ばれる。

■ 共変微分

$\psi(x + dx)$ と比較されるべき量は、平行移動の $\psi(x) + \delta\psi(x)$ である。

$$\begin{aligned}\psi(x + dx) - \{\psi(x) + \delta\psi(x)\} &= \partial_\mu\psi(x)\,dx^\mu - \delta\psi(x) = \partial_\mu\psi(x)\,dx^\mu - i\,B_\mu(x)\,dx^\mu\,\psi(x)\\ &= (\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\,\psi(x)\,dx^\mu\\ &= D_\mu\psi(x)\,dx^\mu\end{aligned}$$

共変微分　$D_\mu \equiv \partial_\mu - i\,e\,A_\mu$　　一般相対性理論では $V_{i:k} = \dfrac{\partial V_i}{\partial x^k} - \Gamma^j{}_{ik}\,V_j$

$$\begin{aligned}D'_\mu\,\psi'(x) &= (\partial_\mu - i\,e\,A'_\mu)\,(e^{i\,e\,\chi(x)}\,\psi(x))\\ &= e^{i\,e\,\chi(x)}\,(\partial_\mu - i\,e\,A_\mu)\,\psi(x)\end{aligned}$$

$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$ を代入、さらに $\partial(e^{i\,e\,\chi}\,\psi) = i\,e\,\partial\chi\,e^{i\,e\,\chi}\,\psi + e^{i\,e\,\chi}\,\partial\psi$ より、

つまり、$D'_\mu\,\psi'(x) = (D_\mu\,\psi(x))'$

すなわち、変換性が変わらないので共変微分と呼ばれる。

■ 径路による差

次に、移動 $x \to x + dx \to x + dx + dy$ と $x \to x + dy \to x + dy + dx$ の差を考える。

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= [\,(1 + i\,B(x{+}dx)\,dy)\,(1 + i\,B(x)\,dx) - (1 + i\,B(x{+}dy)\,dx)\,(1 + i\,B(x)\,dy)\,]\,\psi(x)\\ &= i\,(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)\,dx^\mu dy^\nu\,\psi(x) + (dx,\,dy\ \text{の３次以上の項})\\ &= i\,e\,F_{\mu\nu}\,dx^\mu dy^\nu\,\psi(x)\end{aligned}$$

$B_\mu(x{+}dx) = B_\mu(x) + \partial_\nu B_\mu\,dx^\nu$ 等より、

ここで、$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$　　一般相対性理論では曲率テンソル $R^i{}_{jkl}$

$F_{\mu\nu} = 0$ のときは、$\Delta\psi = 0$ であり、経路に依存しない。ゆえに、任意の点で位相は客観的に比較可能となり、各点のゲージ変換、すなわち $\chi(x)$ で調整しておけば、$A_\mu = 0$ とできる＝移動によって $\delta\psi$ は生じないようにできる。

SU(N) ゲージ理論（非可換ゲージ理論）

以上みてきた理論は、各点での変換性が $\psi'(x) = e^{i\,e\,\chi(x)}\,\psi(x)$ であり、これは 1 行 1 列のユニタリ行列のつくる変換群である＝ U(1) ゲージ理論。また、U(1) 群は可換群（アーベル群）である。

ここで、各点での変換群が SU(N) である場合にゲージ理論を拡張する。SU(N) とは、N 行 N 列のユニタリ行列のつくる群のうち、その行列式が 1 であるもののみからなる部分群をあらわしている。

波動関数は N 個の複素数値をとる φ_a　$(a = 1, 2, \cdots\cdots, N)$ となる。

この $\varphi_a(x)$ が、SU(N) ゲージ変換のもとで次のように変換されると考える。

$$\varphi'_a(x) = u_a{}^b(x)\,\varphi_b(x) \qquad u(x) \in \mathrm{SU(N)} \qquad \left(u_a{}^b(x) = [\exp(i\,g\,\theta^k(x)\,T_k)]_a{}^b \quad T_k\ \text{はリー代数}\right)$$

このとき物理内容は不変であるとする。

次に、点 x の量 $\varphi_a(x)$ を $x + dx$ へ平行移動することを考え、その結果 $\varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x)$ になったとする。

$\delta\varphi_a(x)$ は $\varphi_a(x)$ に対して線形であり、dx について 1 次の量であるとの仮定により、$B_{\mu a}{}^b(x)$　$(a, b = 1, 2, \cdots\cdots, N)$ が存在して次のように書ける。

$$\delta\varphi_a(x) = i\,B_{\mu a}{}^b(x)\,\varphi_b(x)\,dx^\mu \qquad \left(B_{\mu a}{}^b(x) = g\,A^k{}_\mu(x)\,[T_k]_a{}^b \quad \text{リー代数}\ T_k\ \text{のなんらかの線形結合}\right)$$

この移動により、φ の長さ $\varphi^{*a}\varphi_a$ が変化しないと仮定する。このとき、$B_\mu(x)$ はエルミート行列となる。

次に、B_μ のゲージ変換性を求める。

$(\varphi(x) + \delta\varphi(x))' = u(x{+}dx)\,(\varphi(x) + \delta\varphi(x))$ より、

$$\begin{aligned}&(1 + i\,B'_\mu(x)\,dx^\mu)\,u(x)\,\varphi(x) = u(x{+}dx)\,(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)\,\varphi(x)\\ &(1 + i\,B'_\mu(x)\,dx^\mu)\,u(x) = u(x{+}dx)\,(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)\\ &\qquad = (u(x) + \partial u(x)\,dx)\,(1 + i\,B_\mu(x)\,dx^\mu)\end{aligned}$$

$= u(x) + \partial u(x)\, dx + i\, u(x)\, B_\mu(x)\, dx^\mu$ 　　$dxdx$ の項は切り捨てる

dx の 1 次の項を比較すれば、

$B'_\mu(x) = u(x)\, B_\mu(x)\, u^*(x) - i\, \partial_\mu u(x) \cdot u^*(x)$

共変微分

$\varphi(x + dx) - \{\varphi(x) + \delta\varphi(x)\} = (\partial_\mu - i\, B_\mu)\, \varphi(x)\, dx^\mu$ と書けるので、

$D_\mu \equiv \partial_\mu - i\, B_\mu$

また、$(\partial_\mu - i\, B'_\mu)\, \varphi'(x) = u(x)\, (\partial_\mu - i\, B_\mu)\, \varphi(x)$ も確かめられる。

次に、$\varphi(x)$ を経路 $x \to x + dx \to x + dx + dy$ と $x \to x + dy \to x + dy + dx$ に沿って移動させたものの差を考える。

$\Delta\varphi = [\, (1 + i\, B(x{+}dx)\, dy)\, (1 + i\, B(x)\, dx) - (1 + i\, B(x{+}dy)\, dx)\, (1 + i\, B(x)\, dy)\,]\, \varphi(x)$

$= i\, F_{\mu\nu}(x)\, \varphi(x)\, dx^\mu dy^\nu + 0(dx, dy$ の 3 次以上の項 $)$

ここで、$F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) - i\, [B_\mu(x), B_\nu(x)]$ 　　$B_\mu(x)\, B_\nu(x) \neq B_\nu(x)\, B_\mu(x)$ 　非可換

ゲージ変換性は、$F'_{\mu\nu}(x) = u(x)\, F_{\mu\nu}(x)\, u^*(x)$

非可換群 SU(N) ゲージ理論においても、$F_{\mu\nu}(x) = 0$ であれば、移動は経路に依存しないので、客観的に $\varphi_i(x)$ は異なる点同士でも比較可能となり、適当なゲージ変換による調整により、$B_\mu = 0$ とできる＝移動により $\delta\varphi$ を生じないようにできる。

このときの幾何学的意味は、$F_{\mu\nu a}{}^b$ は内部空間と実空間の差こそあれ、Riemann の曲率テンソル $R^i{}_{j\,k\,l}$ そのものであることによっている。

φ と B_μ のゲージ不変なラグランジアン密度をつくる。ここでローレンツ変換不変と簡単のため φ はスカラー粒子を表わすものとする。

次の式が求めるラグランジアン密度となる。

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4g^2}\, Tr\, F_{\mu\nu}{}^2 - \frac{1}{2}\, [\, (\partial_\mu - i\, B_\mu)\, \varphi\,]^* [\, (\partial_\mu - i\, B_\mu)\, \varphi\,] - V(\varphi^*\varphi)$$

これは、物質場の代表としてスカラー粒子 φ のみを考えたものだが、レプトン、クォークそしてヒッグス・スカラー場を考え、ゲージ群として SU(2) ⊗ U(1) 群を採用すれば、Weinberg と Salam の弱・電磁理論がえられる。

また、クォークに SU(3) の基本表現の変換性を仮定し、ゲージ群として SU(3) を使えば、量子色力学が生まれる。

さらに、弱・電磁理論のゲージ性 SU(2) ⊗ U(1) と量子色力学のゲージ群 SU(3) を部分群として含む大きな群 SU(5) や SU(10)（10 × 10 の直交行列がつくる群）を考えれば、大統一理論が出現する。

リーマン幾何学と接続

以上、内部自由度の接続を考えてきたが、ここで、一般相対性理論における実空間の接続をみれば、connection B_μ の幾何学的意味がいっそう明瞭になる。

ベクトル A^μ の長さは、$g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$ で定義され、ベクトル A^μ はローレンツ変換のもとで、次のように変換する。

$$A'^\mu(x') = L^\mu{}_\nu(x)\, A^\nu(x) = \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu}\, A^\nu(x)$$

$A^\mu(x)$ を $x{+}dx$ に移動することを考え、その結果を $A + \delta A$ とすると、

$\delta A^\mu = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\, A^\nu\, dx^\lambda$ 　　ベクトルの平行移動

とあらわせる。ただし、この移動によって、ベクトルの長さは変わらないとする。

このとき、次式がなりたつ。

$$\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\, g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\, g_{\mu\sigma} \right) A^\mu(x)\, A^\nu(x)\, dx^\lambda = 0$$

A^μ の各成分の独立性により、

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}\, g_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\, g_{\mu\sigma} = 0 \qquad ①$$

さらに、ねじれもない（dx^ν の dy^μ 方向への移動と dy^μ の dx^ν 方向への移動が同じ結果を与える。$\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}$）とすると、上の式は解くことが可能となり、

$$\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu})$$

これは、平行移動のさい、ベクトルの長さが変わらず、ねじれがなければ、接続の係数は $g_{\mu\nu}$ で完全に決まってしまうことを示している。

Γ の変換則（ローレンツ変換）

$$(\delta^\mu{}_\nu + \Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda}(x')\, dx'^\lambda) A'^\nu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\tau} (\delta^\tau{}_\nu + \Gamma^\tau{}_{\nu\lambda}\, dx^\lambda) A^\nu(x)$$

dx の 1 次の項を比較すれば、

$$\Gamma'^\mu{}_{\nu\lambda}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda} \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}$$

次に、２つの平行移動 $x \to x + dx \to x + dx + dy$ と $x \to x + dy \to x + dy + dx$ の差を考える。

$$\Delta A^\mu = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} A^\nu\, dx^\lambda dx^\rho$$

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \equiv \partial_\lambda \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}$$

$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 0$ であれば、平行移動は経路に依存しない客観的内容をもつので、適当な座標変換を行えば、接続係数 $\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}$ を 0 とできる。このとき、ベクトルは平行移動によって変わらない。また、$\Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} = 0$ である座標系では、$g_{\mu\nu}$ は常数（上の①式より）となるから、ゆえに、$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 0$ である単連結領域では距離空間としてユークリッド空間と同相になる。

Einstein は、このリーマン・テンソルを使い、次のようにラグランジアンを構成して重力理論をつくった。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2k^2} \int dx^4 \sqrt{g}\, R \qquad g = det(g_{\mu\nu})$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\nu\mu\alpha}$$