場の量子論

場の量子論の核心は、次の 2 点に集約される。

・これまでの位置 $\hat{x}$ や運動量 $\hat{p}$ ではなく、場自身を演算子に昇格させる。

・この場の演算子を消滅生成演算子を使ってあらわす。

1、古典場を量子化する方法

詳細は http://www.yam-web.net/science-note/ の「量子力学 / II 場の量子論 / 場の正準方程式」

ここは簡略に要点のみ。

古典場の汎関数 $F(\psi,\pi,t)=\int \boldsymbol{F}(\psi,\pi,\nabla\psi,\nabla\pi,t)\,d^3r$

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\int\left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\dot{\psi}+\frac{\delta F}{\delta\pi}\dot{\pi}\right)d^3r$$

$$=\frac{\partial F}{\partial t}+\int\left(\frac{\delta F}{\delta\psi}\frac{\delta H}{\delta\pi}-\frac{\delta F}{\delta\pi}\frac{\delta H}{\delta\psi}\right)d^3r$$

$$=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H\}$$ ← 場の Poisson 括弧

基本 Poisson 括弧式は　$\{\psi(\boldsymbol{r},t),\psi(\boldsymbol{r}',t)\}=\{\pi(\boldsymbol{r},t),\pi(\boldsymbol{r}',t)\}=0$　　$\{\psi(\boldsymbol{r},t),\pi(\boldsymbol{r}',t)\}=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

場の量子化（正準量子化）

粒子のときと同じように、上の Poisson 括弧を次のように入れ替える。

交換関係（同時刻交換関係）

$$[\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t),\hat{\psi}(\boldsymbol{r}',t)]=[\hat{\pi}(\boldsymbol{r},t),\hat{\pi}(\boldsymbol{r}',t)]=0$$

$$[\hat{\psi}(\boldsymbol{r},t),\hat{\pi}(\boldsymbol{r}',t)]=i\hbar\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

これでとりあえず、場が演算子に昇格した。

2、消滅生成演算子を使った空間（フォック空間）から出発する方法

参考　http://www.yam-web.net/science-note/ の「量子力学 / II 場の量子論」、「量子力学 / 補論 2」

$\phi(x)$ から振動のノーマル・モードをとりだす。

ϕ を空間座標についてフーリエ展開（フーリエ逆変換）

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\phi(\mathbf{k})\,e^{-ikx}\,d\mathbf{k}$$

$k\cdot x=\omega_k x^0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$　$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ に関しては − なので、フーリエ変換に則して e^{ikx} ではなくて e^{-ikx} としている。

このフーリエ係数 $\phi(\mathbf{k})$ をなんらかの形の消滅生成演算子 $a^\dagger_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ に置き換え、演算子 $\hat{\phi}(x)$ を作る（演算子に昇格させる）。どのように消滅生成演算子に置き換えるかが問題であるが、$a^\dagger_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ の交換関係で最終的に次の交換関係（上の 1 でみた交換関係）が成立するように調整していくことになる。

$$[\hat{\phi}(x),\hat{\phi}(x')]=[\hat{\pi}(x),\hat{\pi}(x')]=0$$

$$[\hat{\phi}(x),\hat{\pi}(x')]=i\,\delta(x-x')$$

さらに、ハミルトニアン H が、個数演算子 $\hat{N}_{\mathbf{k}}=a^\dagger_{\mathbf{k}}\hat{a}_{\mathbf{k}}$ で単純な形にあらわされなければならない。

$a^\dagger_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ の交換関係

Bose 粒子　　$[\hat{a}(\mathbf{k}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')]=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$

Fermi 粒子　　$\{\hat{a}(\mathbf{k}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\}=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$

▌例えば、実スカラー場の場合、

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2\qquad(\partial_\mu{}^2=\partial_0{}^2-\nabla^2)$$

$$\phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\phi(\mathbf{k})\,e^{-ikx}\,d\mathbf{k}$$

$\phi(\mathbf{k})\to\hat{\phi}(\mathbf{k})=\dfrac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left(\hat{a}(\mathbf{k})+\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k})\right)$ とおいてみると、

$$\hat{\phi}(x)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(\hat{a}(\mathbf{k})+\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k})\right)e^{-ikx}$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}(\mathbf{k})\, e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\, e^{ikx} \right)$$ 実の形式（エルミート）になっている

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}(\mathbf{k})\, e^{-i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\, e^{i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right)$$

あるいは、実スカラー場なので最初から実であることを明確にして

$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\psi(\mathbf{k})\, e^{-i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \psi^*(\mathbf{k})\, e^{i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right)$ と展開して、

$\psi(\mathbf{k}) \to \hat{a}(\mathbf{k})$，　$\psi^*(\mathbf{k}) \to \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ と置き換える。

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi$$

$$\hat{\pi}(x) = \partial_0 \hat{\phi}(x) = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(\hat{a}(\mathbf{k})\, e^{-i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\, e^{i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right)$$

$$= -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \int \left(\hat{a}(\mathbf{k}) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}) \right) e^{-ikx}$$

$$\pi(x) = \int \pi(\mathbf{k})\, e^{-ikx}\, d\mathbf{k}$$

したがって、$\pi(\mathbf{k}) \to \hat{\pi}(\mathbf{k}) = -i \sqrt{\frac{\omega_\mathbf{k}}{2}} \left(\hat{a}(\mathbf{k}) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}) \right)$

交換関係

同時刻に評価される場の交換子を考える。（これを「場は同時刻交換関係に従う」という。場は異なる空間位置 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ で評価されるが、このとき $x^0 = y^0$ でなければならない。）すると、

$[\, \hat{\phi}(x),\, \hat{\phi}(x')\,] = [\, \hat{\pi}(x),\, \hat{\pi}(x')\,] = 0$

$[\, \hat{\phi}(x),\, \hat{\pi}(x')\,] = i\, \delta(x - x')$

計算例

$[\, a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\,] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')] = -i \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}'}}} \left(-[a_\mathbf{k}, a^\dagger_{-\mathbf{k}'}] + [a^\dagger_{-\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\mathbf{k}'\mathbf{x}'}$$

$$= i \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}'}}}\, \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\mathbf{k}'\mathbf{x}'}$$ デルタ関数の性質 $\int f(k)\, \delta(k - a)\, dk = f(a)$

$$= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$ $\int exp(i\, k\, x)\, dk = 2\pi\, \delta(x)$

$$= i\, \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

ハミルトニアンは、

$\mathcal{H}(x) = \pi(x)\, \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)$

$H = \int d^3x\, \mathcal{H}(x)$

ここで、

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\hat{a}(\mathbf{k})\, e^{-i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\, e^{i(\omega_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right)$$

$$\hat{N}_\mathbf{k} = a^\dagger_\mathbf{k}\, \hat{a}_\mathbf{k}$$

を使うと、

$$\hat{H} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_\mathbf{k} \left(a^\dagger_\mathbf{k}\, \hat{a}_\mathbf{k} + \frac{1}{2} [\hat{a}_\mathbf{k}, a^\dagger_\mathbf{k}] \right) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \omega_k \left[\hat{N}_\mathbf{k} + \frac{1}{2} \delta^3(\mathbf{0}) \right]$$

となることが示せる。

ディラック場（スピン 1/2 の粒子）

ラグランジアン密度　　$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x)$　　ただし、$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$　Dirac 共役な場

この Lagrangian 密度を Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0$$

に代入すると（ただし、ϕ を $\bar{\psi}$ に置き換える）、

第１項は $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$ となり、第２項は $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0$ となる。

したがって、Euler-Lagrange 方程式は、

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \qquad \text{運動方程式}$$

一般化運動量 π は、

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^0) = i\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 = i\psi^\dagger(x) \qquad \gamma^0\gamma^0 = I$$

Hamiltonian 密度は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(x) &= \pi(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L}(x)\\
&= i\psi^\dagger\dot{\psi} - \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi\\
&= i\psi^\dagger\dot{\psi} - \bar{\psi}(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi \qquad i = 1, 2, 3\\
&= i\psi^\dagger\dot{\psi} - \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)\psi\\
&= i\psi^\dagger\dot{\psi} - i\psi^\dagger\dot{\psi} - \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^i\partial_i - m)\psi \qquad (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0\\
&= \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\partial_0)\psi\\
&= i\psi^\dagger\dot{\psi}
\end{aligned}$$

ここでまず、Dirac 方程式の古典解をみておこう。運動量 k で運動する粒子の自由空間解を考える。

http://www.yam-web.net/science-note/ の「量子力学 / 補論 2-4」参照

Dirac 方程式の解は、e^{-ikx} と e^{ikx} に依存する項に分かれて、$u(x) = u(\mathbf{k})e^{-ikx}$ と $v(x) = v(\mathbf{k})e^{ikx}$ の重ね合わせになっていると考える。　$kx = \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$　$k_0 = \omega_{\mathbf{k}} = E$

$$\psi(x) = \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left(u(\mathbf{k})e^{-ik\cdot x} + v(\mathbf{k})e^{ik\cdot x}\right) \qquad \text{相対論的エネルギー } \omega_{\mathbf{k}} \text{ をもつ自由粒子の平面波解の重ね合わせ}$$

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u(\mathbf{k}) = 0\ ,\quad (\gamma^\mu k_\mu + m)v(\mathbf{k}) = 0$$

$u(\mathbf{k})$, $v(\mathbf{k})$ を具体的に求めてみる。

以下、カイラル表現を使う。そのほうが計算の見通しがよくなる。

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{あわせると、}\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ただし、}\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma^i) \quad \tilde{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\sigma^i)$$

$u(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix}$ とおいて、$(\gamma^\mu k_\mu - m)u(\mathbf{k}) = 0$ に代入すると、

$$0 = \begin{pmatrix} -m & k_\mu\sigma^\mu \\ k_\mu\tilde{\sigma}^\mu & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\chi + k_\mu\sigma^\mu\zeta \\ k_\mu\tilde{\sigma}^\mu\chi - m\zeta \end{pmatrix} \qquad \leftarrow\ \gamma^\mu k_\mu - m = \begin{pmatrix} -m & k_\mu\sigma^\mu \\ k_\mu\tilde{\sigma}^\mu & -m \end{pmatrix}$$

となり、これを満たすには、

$$\chi = \sqrt{k_\mu\sigma^\mu}\,\xi \qquad k_\mu\sigma^\mu = k_0\mathbf{1} - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma} \qquad \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma} = k_1\sigma_1 + k_2\sigma_2 + k_3\sigma_3 \qquad (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{k}^2\ (\ (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \mathbf{k}^2\mathbf{1}\ )$$

$$\zeta = \sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}\,\xi \qquad k_\mu\tilde{\sigma}^\mu = k_0\mathbf{1} + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

とおけばよい。すると、

$$-m\chi + k_\mu\sigma^\mu\zeta = (-m\sqrt{k_\mu\sigma^\mu} + k_\mu\sigma^\mu\sqrt{k_\nu\tilde{\sigma}^\nu})\xi = 0 \qquad k_\mu\sigma^\mu k_\nu\tilde{\sigma}^\nu = k_\mu k^\mu = m^2$$

$$k_\mu\tilde{\sigma}^\mu\chi - m\zeta = (k_\mu\tilde{\sigma}^\mu\sqrt{k_\nu\sigma^\nu} - m\sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu})\xi = 0$$

$\sqrt{k_\mu\sigma^\mu}$ と $\sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}$ の具体的な表式は、

$$\sqrt{k_\mu\sigma^\mu} = \sqrt{k_0\mathbf{1} - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}(\sqrt{k_o + |\mathbf{k}|} + \sqrt{k_o - |\mathbf{k}|})\mathbf{1} - \frac{1}{2}(\sqrt{k_o + |\mathbf{k}|} - \sqrt{k_o - |\mathbf{k}|})\frac{\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{k}|}$$

（$\sqrt{k_0\mathbf{1} - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$ を $a\mathbf{1} - b\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の形にもっていくことを考える。）

$$\sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu} = \sqrt{k_0\mathbf{1} + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}(\sqrt{k_o + |\mathbf{k}|} + \sqrt{k_o - |\mathbf{k}|})\mathbf{1} + \frac{1}{2}(\sqrt{k_o + |\mathbf{k}|} - \sqrt{k_o - |\mathbf{k}|})\frac{\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{k}|}$$

ξ は任意の 2 成分場なので、基底として $\xi^r\ (r=1,2)$ を選び、

$$\xi^{r\dagger}\xi^s=\delta^{rs}\ ,\quad \sum_{s=1}^{2}\xi^s\xi^{s\dagger}=\mathbf{1}$$　　もっとも簡単な例は、$\xi^1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \xi^2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

のように規格直交化する。すると $u(\mathbf{k})$ は

$$u(\mathbf{k})=\sum_{r=1}^{2}a^r{}_p\,u^r(\mathbf{k})\ ,\quad u^r(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\sqrt{k_\mu\sigma^\mu}\ \xi^r\\ \sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}\ \xi^r\end{pmatrix}$$

のように表される。$a^r{}_p$ は線形結合の係数である。

同様に、$v(\mathbf{k})$ についても考え、

$$v(\mathbf{k})=\sum_{r=1}^{2}b^r{}_p{}^\dagger\,v^r(\mathbf{k})\ ,\quad v^r(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\sqrt{k_\mu\sigma^\mu}\ \xi^r\\ -\sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}\ \xi^r\end{pmatrix}$$

最終的に Dirac 方程式の古典解は、

$$\psi(x)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\sum_{r=1}^{2}(\,a^r{}_p\,u^r(\mathbf{k})\,e^{-ik\cdot x}+b^r{}_p{}^\dagger\,v^r(\mathbf{k})\,e^{ik\cdot x}\,)$$

となる。

$u^r(\mathbf{k})$ と $v^s(\mathbf{k})$ の関係式

$$u^r(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\sqrt{k_\mu\sigma^\mu}\ \xi^r\\ \sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}\ \xi^r\end{pmatrix}\ ,\quad v^s(\mathbf{k})=\begin{pmatrix}\sqrt{k_\mu\sigma^\mu}\ \xi^s\\ -\sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}\ \xi^s\end{pmatrix}$$

Dirac 共役は、

$$\bar{u}^r(\mathbf{k})=u^{r\dagger}(\mathbf{k})\gamma^0=(\,\xi^{r\dagger}\sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}\quad \xi^{r\dagger}\sqrt{k_\mu\sigma^\mu}\,)\ ,\quad \bar{v}^s(\mathbf{k})=(\,-\xi^{s\dagger}\sqrt{k_\mu\tilde{\sigma}^\mu}\quad \xi^{s\dagger}\sqrt{k_\mu\sigma^\mu}\,)$$

内積を計算すると

$$\bar{u}^r(\mathbf{k})\,u^s(\mathbf{k})=2m\delta^{rs}\ ,\quad \bar{v}^r(\mathbf{k})\,v^s(\mathbf{k})=-2m\delta^{rs}\qquad\leftarrow\qquad k_\mu\sigma^\mu k_\nu\tilde{\sigma}^\nu=k_\mu k^\mu=m^2\ ,\quad \xi^{r\dagger}\xi^s=\delta^{rs}\ ,\quad \sum_{s=1}^{2}\xi^s\xi^{s\dagger}=\mathbf{1}$$

$$\bar{u}^r(\mathbf{k})\,v^s(\mathbf{k})=0\ ,\quad \bar{v}^r(\mathbf{k})\,u^s(\mathbf{k})=0$$

$$u^{r\dagger}(\mathbf{k})\,u^s(\mathbf{k})=2k_0\,\delta^{rs}\ ,\quad v^{r\dagger}(\mathbf{k})\,v^s(\mathbf{k})=2k_0\,\delta^{rs}\qquad k_0=\omega_\mathbf{k}$$

$$u^{r\dagger}(\mathbf{k})\,v^s(-\mathbf{k})=0\ ,\quad v^{r\dagger}(\mathbf{k})\,u^s(-\mathbf{k})=0$$

また、完全性の関係式として

$$\sum_{r=1}^{2}u^r(\mathbf{k})\,\bar{u}^r(\mathbf{k})=k_\mu\gamma^\mu+m$$

$$\sum_{r=1}^{2}v^r(\mathbf{k})\,\bar{v}^r(\mathbf{k})=k_\mu\gamma^\mu-m$$

Dirac 場の量子化

Dirac 場の正準量子化

Dirac 場 ψ とその一般化運動量 π の間に次の同時刻反交換関係を設定する。

$$\{\,\hat{\psi}_i(t,\mathbf{x}),\ \hat{\psi}_j(t,\mathbf{x}')\,\}=\{\,\hat{\pi}_i(t,\mathbf{x}),\ \hat{\pi}_j(t,\mathbf{x}')\,\}=0$$

$$\{\,\hat{\psi}_i(t,\mathbf{x}),\ \hat{\pi}_j(t,\mathbf{x}')\,\}=i\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

Dirac 場 ψ を Fourier 変換し、振動のノーマル・モードをとりだす。（先の古典解参照）

$$\hat{\psi}(x)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\sum_{s=\pm1}[\,\hat{a}(\mathbf{k},s)\,u(\mathbf{k},s)\,e^{-ikx}+\hat{b}^\dagger(\mathbf{k},s)\,v(\mathbf{k},s)\,e^{ikx}\,]\qquad e^{ikx}=e^{i(\omega_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\text{ 等}$$

この場合は、消滅（生成）の演算子として $\hat{a}(\mathbf{k},s),\ \hat{b}(\mathbf{k},s)$（$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k},s),\ \hat{b}^\dagger(\mathbf{k},s)$）の 2 種類がある。

$s=\pm1$ でそれぞれスピンの z 成分が $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ であることを指定している。

特殊相対性理論の要請より、$p^2=E-|\mathbf{p}|^2=k^2=\omega^2-|\mathbf{k}|^2=m^2\ \rightarrow\ \omega_\mathbf{k}=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$

交換関係　　$\{\,\hat{a}(\mathbf{k},s),\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}',s')\,\}=\{\,\hat{b}(\mathbf{k},s),\ \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}',s')\,\}=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{ss'}$

$$\{\hat{a}(\mathbf{k},s),\ \hat{a}(\mathbf{k}',s')\}=\{\hat{b}(\mathbf{k},s),\ \hat{b}(\mathbf{k}',s')\}=\{\hat{a}(\mathbf{k},s),\ \hat{b}(\mathbf{k}',s')\}=0$$

以下、演算子を表すハット記号∧は省略する。

Minkowski 共役な場は、

$$\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\sum_{s=\pm1}[\,a^\dagger(\mathbf{k},s)\,\bar{u}(\mathbf{k},s)\,e^{ikx}+b(\mathbf{k},s)\,\bar{v}(\mathbf{k},s)\,e^{-ikx}\,]\qquad \bar{u}(\mathbf{k},s)=u^\dagger(\mathbf{k},s)\,\gamma^0$$

$\{\psi_i(t,\mathbf{x}),\ \pi_j(t,\mathbf{x}')\}=i\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ を確かめる。

$$\begin{aligned}
&\{\psi_i(t,\mathbf{x}),\ \pi_j(t,\mathbf{x}')\}\\
&=\{\psi_i(t,\mathbf{x}),\ i\,\psi^\dagger{}_j(t,\mathbf{x}')\}\\
&=i\Big\{\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\sum_{s=\pm1}[\,a(\mathbf{k},s)\,u_i(\mathbf{k},s)\,e^{-ikx}+b^\dagger(\mathbf{k},s)\,v_i(\mathbf{k},s)\,e^{ikx}\,],\\
&\qquad\int\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{s'=\pm1}[\,a^\dagger(\mathbf{k}',s')\,u_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\,e^{ik'x'}+b(\mathbf{k}',s')\,v_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\,e^{-ik'x'}\,]\Big\}\\
&=i\int\frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{s,s'}\Big\{a(\mathbf{k},s)\,u_i(\mathbf{k},s)\,e^{-ikx}+b^\dagger(\mathbf{k},s)\,v_i(\mathbf{k},s)\,e^{ikx},\\
&\qquad a^\dagger(\mathbf{k}',s')\,u_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\,e^{ik'x'}+b(\mathbf{k}',s')\,v_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\,e^{-ik'x'}\Big\}\\
&=i\int\frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{s,s'}[\,u_i(\mathbf{k},s)\,u_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\{a(\mathbf{k},s),a^\dagger(\mathbf{k}',s')\}\,e^{-ikx}\,e^{ik'x'}\\
&\qquad+v_i(\mathbf{k},s)\,v_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\{b^\dagger(\mathbf{k},s),b(\mathbf{k}',s')\}\,e^{ikx}\,e^{-ik'x'}\,]\\
&=i\int\frac{d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\sqrt{\omega_\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}'}}}\sum_{s,s'}[\,u_i(\mathbf{k},s)\,u_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{ss'}\,e^{-ikx}\,e^{ik'x'}+v_i(\mathbf{k},s)\,v_j^\dagger(\mathbf{k}',s')\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,\delta_{ss'}\,e^{ikx}\,e^{-ik'x'}\,]
\end{aligned}$$

ここで、$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\delta(x-a)\,dx=f(a)$（デルタ関数公式）を使う。

また $\mathbf{k}=\mathbf{k}'$ のとき、$\omega_\mathbf{k}=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ より $\omega_\mathbf{k}=\omega_{\mathbf{k}'}$ が成立する。さらに、$e^{ikx}=e^{i(\omega_\mathbf{k}t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$ 等に留意する。

$$上式=i\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \frac{1}{2\omega_\mathbf{k}}\sum_s[\,u_i(\mathbf{k},s)\,u_j^\dagger(\mathbf{k},s)\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}+v_i(\mathbf{k},s)\,v_j^\dagger(\mathbf{k},s)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,]$$

$$\sum_s u_i(\mathbf{k},s)\,u_j^\dagger(\mathbf{k},s)=\sum_s u_i(\mathbf{k},s)\,\bar{u}_j(\mathbf{k},s)\,\gamma^0=(\gamma^\mu k_\mu+m)\,\gamma^0$$

$$\sum_s v_i(\mathbf{k},s)\,v_j^\dagger(\mathbf{k},s)=\sum_s v_i(\mathbf{k},s)\,\bar{v}_j(\mathbf{k},s)\,\gamma^0=(\gamma^\mu k_\mu-m)\,\gamma^0$$

$$\begin{aligned}
上式&=i\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \frac{1}{2\omega_\mathbf{k}}[\,(\gamma^\mu k_\mu+m)\,\gamma^0\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}+(\gamma^\mu k_\mu-m)\,\gamma^0\,e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,]\\
&=i\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \frac{1}{2\omega_\mathbf{k}}[\,(\gamma^0\omega_\mathbf{k}-\gamma^h k_h+m)\,\gamma^0\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}+(\gamma^0\omega_\mathbf{k}-\gamma^h k_h-m)\,\gamma^0\,e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,]\qquad h=1,2,3\\
&=i\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \frac{1}{2\omega_\mathbf{k}}[\,(\gamma^0\omega_\mathbf{k}-\gamma^h k_h+m)\,\gamma^0\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}+(\gamma^0\omega_\mathbf{k}+\gamma^h k_h-m)\,\gamma^0\,e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\,]\\
&=i\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}_{ij}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}exp(i\,k\,(x-x'))\,dk=\delta(x-x')$（デルタ関数公式）より

$上式=i\,\delta_{ij}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$

次に Hamiltonian を計算してみる。

$$\begin{aligned}
H&=\int d^3\mathbf{x}\,\mathcal{H}\\
&=\int d^3\mathbf{x}\,i\,\psi^\dagger\,\dot{\psi}\\
&=\int d^3\mathbf{x}\,i\,\psi^\dagger\,\dot{\psi}
\end{aligned}$$

$$\psi(x)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\sum_{s=\pm1}[\,a(\mathbf{k},s)\,u(\mathbf{k},s)\,e^{-ikx}+b^\dagger(\mathbf{k},s)\,v(\mathbf{k},s)\,e^{ikx}\,]$$

$$\psi^\dagger(x)=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\sum_{s=\pm1}[\,a^\dagger(\mathbf{k},s)\,u^\dagger(\mathbf{k},s)\,e^{ikx}+b(\mathbf{k},s)\,v^\dagger(\mathbf{k},s)\,e^{-ikx}\,]$$

$$上式=i\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}\sum_{s=\pm1}[\,a^\dagger(\mathbf{k},s)\,u^\dagger(\mathbf{k},s)\,e^{ikx}+b(\mathbf{k},s)\,v^\dagger(\mathbf{k},s)\,e^{-ikx}\,]$$

$$\times \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s'=\pm 1} [\, a(\mathbf{k}', s')\, u(\mathbf{k}', s')\, e^{-i k' x} + b^\dagger(\mathbf{k}', s')\, v(\mathbf{k}', s')\, e^{i k' x} \,]$$

$$= i \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s,s'} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, e^{ikx} + b(\mathbf{k}, s)\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, e^{-ikx} \,]$$
$$\times [\, (-i\,\omega_{\mathbf{k}'})\, a(\mathbf{k}', s')\, u(\mathbf{k}', s')\, e^{-ik'x} + (i\,\omega_{\mathbf{k}'})\, b^\dagger(\mathbf{k}', s')\, v(\mathbf{k}', s')\, e^{ik'x} \,]$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s,s'} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, e^{ikx} + b(\mathbf{k}, s)\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, e^{-ikx} \,]$$
$$\times [\, a(\mathbf{k}', s')\, u(\mathbf{k}', s')\, e^{-ik'x} - b^\dagger(\mathbf{k}', s')\, v(\mathbf{k}', s')\, e^{ik'x} \,] \qquad e^{ikx} = e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \text{ 等}$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s,s'} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}', s')\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u(\mathbf{k}', s')\, e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$$
$$- a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(\mathbf{k}', s')\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, v(\mathbf{k}', s')\, e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t + \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$$
$$+ b(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}', s')\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u(\mathbf{k}', s')\, e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t + \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}}$$
$$- b(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(\mathbf{k}', s')\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, v(\mathbf{k}', s')\, e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \,]$$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} exp(i\,k\,x)\, dx = \delta(k)$（デルタ関数公式）より

$$\text{上式} = \int d^3\mathbf{k}\, d^3\mathbf{k}' \frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s,s'} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}', s')\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u(\mathbf{k}', s')\, e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$
$$- a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(\mathbf{k}', s')\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, v(\mathbf{k}', s')\, e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t + \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$$
$$+ b(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}', s')\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u(\mathbf{k}', s')\, e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t + \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')$$
$$- b(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(\mathbf{k}', s')\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, v(\mathbf{k}', s')\, e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \omega_{\mathbf{k}'} t)}\, \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \,]$$

$\mathbf{k} = \pm\,\mathbf{k}'$ のとき、$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ より $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'}$ が成立する。

$$\text{上式} = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k} \sum_{s,s'} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s')\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u(\mathbf{k}, s') - a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(-\mathbf{k}, s')\, u^\dagger(\mathbf{k}, s)\, v(-\mathbf{k}, s')\, e^{i\,2\,\omega_{\mathbf{k}} t}$$
$$+ b(\mathbf{k}, s)\, a(-\mathbf{k}, s')\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, u(-\mathbf{k}, s')\, e^{-i\,2\,\omega_{\mathbf{k}} t} - b(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(\mathbf{k}, s')\, v^\dagger(\mathbf{k}, s)\, v(\mathbf{k}, s') \,]$$

$$= \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k} \sum_{s,s'} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s')\, 2\,\omega_{\mathbf{k}}\, \delta_{ss'} - a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(-\mathbf{k}, s')\, 0\, e^{i\,2\,\omega_{\mathbf{k}} t}$$
$$+ b(\mathbf{k}, s)\, a(-\mathbf{k}, s')\, 0\, e^{-i\,2\,\omega_{\mathbf{k}} t} - b(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(\mathbf{k}, s')\, 2\,\omega_{\mathbf{k}}\, \delta_{ss'} \,]$$

$$= \int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \sum_{s} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s) - b(\mathbf{k}, s)\, b^\dagger(\mathbf{k}, s) \,]$$

$$= \int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \sum_{s} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s) - b^\dagger(\mathbf{k}, s)\, b(\mathbf{k}, s) + \delta(0) \,]$$

第 3 項は、$\int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \sum_{s} \delta(0) = \int d^3\mathbf{k}\, \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}\; 2\,\delta(0) = 2\,m$ となるが、エネルギー軸の原点をずらして 0 にすることができるので、

$$H = \int d^3\mathbf{k}\, \omega_{\mathbf{k}} \sum_{s} [\, a^\dagger(\mathbf{k}, s)\, a(\mathbf{k}, s) - b^\dagger(\mathbf{k}, s)\, b(\mathbf{k}, s) \,]$$