生成演算子と消滅演算子

場の量子論の特色は、相互作用において粒子の型や個数が変化できるというものである。そのため、この理論は、これまでのように単一粒子の波動関数を使って表すことはできなくなった。この理論の基本的な物体は演算子として振る舞う量子場であり、粒子を生成したり、消滅したりすることができる。

Bose 演算子

定理

ある演算子 $\hat{a}$ と、そのエルミート共役 $\hat{a}^\dagger$ が、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たすとき、

$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の固有値は、$0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, \infty$ である。

証明

まず、演算子 $\hat{N}$ はエルミートなので、その固有値は実数である。また、$\hat{N}$ の形からそれらは負ではない *。

$\hat{N}$ の固有値を n 、それに対する固有ベクトルを $|n>$ であらわすと、

$\hat{N}|n> = n|n>$　　n は実数で、$n \geq 0$　　しかし、n が整数であるかどうかはわからない。

*　$\hat{N}|n> = n|n>$（$|n>$ は規格化されているとする）より $n = <n|\hat{N}|n> = <n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n> = \|\hat{a}|n>\|^2 \geqq 0$

$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$　より、

$[\hat{N}, \hat{a}]|n> = -\hat{a}|n>$

$\hat{N}\hat{a}|n> - n\hat{a}|n> = -\hat{a}|n>$

$\hat{N}\hat{a}|n> = (n-1)\hat{a}|n>$

すなわち、$\hat{a}|n>$ も $\hat{N}$ の固有ベクトルで、固有値は $n-1$ となる。

これをくり返すと、

$$\hat{N}\underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\hat{a}}_{m個}|n> = (n-m)\underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\hat{a}}_{m個}|n>$$

$\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\hat{a}|n>$ も $\hat{N}$ の固有ベクトルで、固有値は $n-m$

ところが $\hat{N}$ の固有値は、負にはなりえないから、$n \geq m$

最大の m を m_0 とすると、

$$\begin{cases} \underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\hat{a}}_{m_0個}|n> \neq 0 \\ \underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\cdots\hat{a}}_{m_0+1個}|n> = 0 \qquad ※1 \end{cases}$$

下の ※1 式が成りたたなければ、$\hat{N}$ には負の固有値があることになる。

左から $\hat{a}^\dagger$ を掛けると、

$$\hat{a}^\dagger\underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\cdots\hat{a}}_{m_0+1}|n> = \hat{N}\underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\hat{a}}_{m_0}|n> = (n-m)\underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\hat{a}}_{m_0}|n> = 0$$

すなわち、$n = m_0$

m_0 は負でない整数であるから、n も負でない整数となる。

$\underbrace{\hat{a}\,\hat{a}\cdots\cdots\hat{a}}_{m_0}|n> \equiv |0>$（$\hat{N}$ の固有値は 0）とおくと、$\hat{a}|0> = 0$　　←　※1 より

したがって、$\hat{N}|0> = 0|0>$

これまでは、固有値が 0 になるまで減少させてきたが、次に 0 から増加させてみる。

交換関係より、$\hat{N}\hat{a}^\dagger|0> = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)|0> = \hat{a}^\dagger|0>$

これを続けると、$\hat{N}(\hat{a}^\dagger)^n|0> = n(\hat{a}^\dagger)^n|0>$ が成りたつことがわかる。

$|n> = (\hat{a}^\dagger)^n|0>$

規格化しておくと、$|n> = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0>$　　　←　$<n|n> = <0|(\hat{a})^n(\hat{a}^\dagger)^n|0> = n!$ より

まとめておくと、演算子 $\hat{a}$ は $\hat{N}$ の固有値を 1 つだけ減らすので消滅演算子、演算子 $\hat{a}^\dagger$ は $\hat{N}$ の固有値を 1 つだけ増やすので生成演算子とよばれる。$|0>$ は $\hat{N}$ の最低の固有値に属し、これ以上 $\hat{N}$ の固有値を下げることのできない状態だからしばしば真空とよばれる。(場から粒子が生成したり、消滅したりする場面がイメージできるだろう。)

Fermi 演算子

反交換関係 $\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} \equiv \hat{c}\,\hat{c}^\dagger + \hat{c}^\dagger\hat{c} = 1$, $\{\hat{c}, \hat{c}\} = 0$ ($\hat{c}\,\hat{c} = 0$) を満たす演算子があって、

$\hat{N} \equiv \hat{c}^\dagger\hat{c}$ を定義する。

$[\hat{N}, \hat{c}] = -\hat{c}$　　①

$[\hat{N}, \hat{c}^\dagger] = \hat{c}^\dagger$　　②

$\hat{N}$ の固有値 n に属する固有ベクトルを $|n>$ とすると ($\hat{N}|n> = n|n>$)、

前と同様にして、

$\hat{N}\hat{c}|n> = (n-1)\hat{c}|n>$　　←　①より

$\hat{N}\hat{c}^\dagger|n> = (n+1)\hat{c}^\dagger|n>$　　←　②より

すなわち、$\hat{c}$ と $\hat{c}^\dagger$ は、の固有値を 1 つだけ減らしたり増やしたりする。

定理　　$\hat{N}$ の固有値は、0 か 1 のみである。

証明

$\hat{N}\hat{N} = \hat{c}^\dagger\hat{c}\,\hat{c}^\dagger\hat{c} = \hat{c}^\dagger(-\hat{c}^\dagger\hat{c} + 1)\hat{c} = \hat{c}^\dagger\hat{c} = \hat{N}$　　←　$\{\hat{c}, \hat{c}^\dagger\} = 1$, $\{\hat{c}, \hat{c}\} = 0$ ($\hat{c}\,\hat{c} = 0$)

すなわち、$\hat{N}(\hat{N} - 1) = 0$

よって、$\hat{N}$ の固有値は、0 か 1 のみである。

$\hat{N}$ の固有値 $n = 0$ に属する固有ベクトルを $|0>$ であらわすと、$\hat{c}|0> = 0$ である。

∵　$\hat{N}\hat{c}|n> = (n-1)\hat{c}|n>$ より、

$\hat{N}\hat{c}|0> = -\hat{c}|0>$

$\hat{c}|0>$ が 0 でないと $\hat{N}$ が負の固有値をもつことになる。

当然、$\hat{N}$ の固有値 $n = 1$ に属する固有ベクトルは $\hat{c}^\dagger|0>$ である。

$\hat{N}\hat{c}^\dagger|0> = \hat{c}^\dagger|0>$

$<0|0> = 1$ と規格化しておくと、$\hat{c}^\dagger|0>$ も規格化される。

拡張

場の量子論では上述の代数を駆使することになるが、実際の粒子は運動量やスピン … などをもっているから、ただ 1 つの $\hat{a}$ (およびそのエルミート共役 $\hat{a}^\dagger$) だけではなく、多くの $\hat{a}_i$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots$) まで拡張しておいたほうがよさそうである。

<u>Bose 演算子</u>

$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$

$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0$

$\hat{N}_i \equiv \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i$ の固有値は、$n_i = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, \infty$

規格化直交ベクトルは、$|n_1, n_2, \cdots> = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}|0>$

ただし $|0>$ は、

$\hat{N}_i|0> = 0$

$\hat{a}_i|0> = 0$

$<0|0> = 1$

場の量子論では、演算子 $\hat{N}_i$ がラベル i（たとえば運動量とかスピン）をもつ Bose 統計に従う粒子の数をあらわす演算子になるので、それを ***i* 状態にある粒子数演算子**とよぶ。

Fermi 演算子

$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$

$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0$

$\hat{N}_i \equiv \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$ の固有ベクトルは、$|n_1, n_2, \cdots> = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{c}_2^\dagger)^{n_2} \cdots\cdots |0>$　※2

ここで $n_1, n_2, \cdots$ は、0 または 1 しかとらない数である。そのために規格化因子は不要になる。

※2　対称性についての注意

固有ベクトル $|n_1, n_2, \cdots> = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}|0>$ においては、交換関係 $[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0$ のために生成演算子の順序をどう変えても同じである（ラベルの交換に対して対称）。

一方、$|n_1, n_2, \cdots> = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{c}_2^\dagger)^{n_2} \cdots\cdots |0>$ においては、$\hat{c}_i^\dagger$ が反交換関係 $\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0$ をとるため、ラベルの交換に対して反対称になる。

たとえば、$\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_5^\dagger |0>$ において 1 と 5 を交換すると、

$\hat{c}_5^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_1^\dagger |0> = -\hat{c}_1^\dagger \hat{c}_2^\dagger \hat{c}_3^\dagger \hat{c}_4^\dagger \hat{c}_5^\dagger |0>$ となる。

つまり、ラベルの順序まで指定しておかないと正確な記述ではない。そこで、ラベルの小さい順に左から並べると約束しておく。

●フォック空間

規格化直交ベクトル $|n_1, n_2, \cdots> = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}|0>$ や $|n_1, n_2, \cdots> = (\hat{c}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{c}_2^\dagger)^{n_2} \cdots\cdots |0>$ で張られる空間を Fock（フォック）空間という。

粒子が 1 個もない状態、つまり消滅演算子を作用させると 0 になる状態を真空と呼び $|0>$ と記す。さまざまな粒子数をもつ状態はこれに生成演算子を次々に作用させてつくられる。これらを基底として張られる状態ベクトルの空間はフォック空間とよばれ、これが場の量子論の具体的内容をもりこむ器となる。