昇降演算子

2 つの演算子 X、N が次の交換関係を満たすと仮定する。

$[N, X] = cX$　　　c はスカラー量

$|n>$ を演算子 N の固有状態とする。

$N|n> = n|n>$

このとき演算子 X が $|n>$ に作用すると固有値を c だけシフトする。

$$
\begin{aligned}
NX|n> &= (XN + [N, X])|n> \\
&= XN|n> + [N, X]|n> \\
&= nX|n> + cX|n> \\
&= (n+c)X|n>
\end{aligned}
$$

つまり $|n>$ が N の固有値 n における固有状態であるとき、$X|n>$ は固有値 $n+c$ をもつ N の固有状態である。演算子 X は c が正の実数であるとき N の上昇演算子、c が負の実数であるとき N の下降演算子という。

もし N がエルミート演算子 のとき、c は実数でなければならず、X のエルミート随伴 は次の交換関係を満たす。

$[N, X^{\dagger}] = -cX^{\dagger}$

特に X が N の下降演算子のときの $X^{\dagger}$ は N の上昇演算子であり、その逆も成り立つ。

//

以下の参照は、http://www.yam-web.net/science-note/ より

例　角運動量演算子　　「群論 / 補論 4-3 一般角運動量」

交換関係 $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$（角運動量の定義）　　具体的には、$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3$, $[\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1$, $[\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2$

$\boldsymbol{J}^2 \equiv \hat{J}_1^{\,2} + \hat{J}_2^{\,2} + \hat{J}_3^{\,2}$

$\hat{J}_{\pm} \equiv \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$　　$\hat{J}_+$ と $\hat{J}_-$ は互いにエルミート共役の関係になる。$\hat{J}_-^{\,\dagger} = \hat{J}_+$,　$\hat{J}_+^{\,\dagger} = \hat{J}_-$

公式

$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_1] = [\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_2] = [\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_3] = 0$

$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_{\pm}] = 0$

$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3$

$[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}] = \pm\hat{J}_{\pm}$

次が、上で見た昇降演算子 X と同じ交換関係になっている。

$[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}] = \pm\hat{J}_{\pm}$

$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_{\pm}] = 0$

$\hat{J}_{\pm}$ を乗ずると、$\hat{J}_3$ の固有値は 1 つずつ増減するが、$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値は不変である。

例　調和振動子　　「量子力学 / 第 2 部 場の量子論 / 場の量子化—いくつかの例、自由場の量子論」

正準交換関係　$[\hat{p}, \hat{q}] = -i$　　　$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2)$　　Bose 粒子

ここで $\hat{p}$, $\hat{q}$ のかわりに次式で定義される演算子 $\hat{a}$, $\hat{a}^{\dagger}$ を導入する。

$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{q} + \frac{i}{\omega}\hat{p}\right)$,　$\hat{a}^{\dagger} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{q} - \frac{i}{\omega}\hat{p}\right)$

このとき　$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$,　$\hat{H} = \frac{\omega}{2}\{\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}\} = \omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{\omega}{2}$　　$\{A, B\} = AB + BA$

すなわち　$[\hat{H}, \hat{a}^{\dagger}] = \omega\hat{a}^{\dagger}$,　$[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega\hat{a}$

$\hat{H}$ の固有値は、$E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$　　$n = 0, 1, \cdots\cdots$ となる。

例　生成消滅演算子　　「量子力学 / 第 2 部 場の量子論 / 生成演算子と消滅演算子」

ある演算子 $\hat{a}$ と、そのエルミート共役 $\hat{a}^{\dagger}$ が、交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$ を満たすとする。(Bose 粒子)

$\hat{N} \equiv \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ とおくと、

$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$,　$[\hat{N}, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{a}^{\dagger}$

$\hat{N} \equiv \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ の固有値は、$0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, \infty$ となる。

//

角運動量演算子を見ると、これはリー代数で見たカルタン標準形 $\{H_a, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ の性質によく似ている。H_a は J_3 に、$E_{\pm\alpha}$ は昇降演算子 $J_\pm$ に類似した役割を果たしていることがわかる。

カルタン標準形 $\{H_a, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$　　「群論 / V 単純リー代数とルート空間 / 7 カルタン標準系とルート」

$[H_a, E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha_a E_{\pm\alpha}$

$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_a H_a$

$E_\alpha{}^{\dagger} = E_{-\alpha}$

「群論 / V 単純リー代数とルート空間 / １０ ウエイトと既約表現」

$H_a \mid \mu, D> = \mu_a \mid \mu, D>$ $(a = 1, \cdots, r)$　　$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r)$ はウエイト

$\mid \mu, D>$ に E_α あるいは $E_{-\alpha}$ を繰り返し作用させることによってウエイトのシリーズ

$\boldsymbol{\mu} - m\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu} - (m-1)\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\mu} + n\boldsymbol{\alpha}$ $(m, n \geq 0)$

が得られる。

「群論 / Ⅳ 回転群 / リー代数とその表現」

回転群 **SO**(3) に対するリー代数の既約表現を指定するパラメーターは j で、j を指定すると、その表現の次元は 2 j + 1 であり、2 j + 1 個の基底ベクトルは $\hat{J}_3$ の固有値 m_j で区別される。m_j は一般にウエイトと呼ばれる。

$\hat{J}_3 \mid j, m_j> = m_j \mid j, m_j>$　　m_j のとりえる値は、$j, j-1, \cdots\cdots\cdots\cdots, -j+1, -j$