Ⅷ　ゲージ理論とリー代数

この章は、次のノートを合冊したものです。
http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science007.pdf
http://www.yam-web.net/science-note/QM1.pdf　page77　page80

1、ゲージ理論とリー代数

素粒子で扱われる理論は殆どがゲージ理論である。電磁相互作用は QED、また弱い力も合わせた弱電磁相互作用の理論は Weinberg-Salam 理論というゲージ理論である。強い相互作用の理論である QCD もゲージ理論の一つである。そしてこれら素粒子論を数学的に支えるのがリー群とリー代数である。QED は U(1)、弱電理論は SU(2) ⊗ U(1) 、QCD は SU(3) 等々の対称性をめぐって議論される。

▌ラグランジアン密度と運動方程式

1 つの粒子はその粒子の表わす演算子 $\varphi(x)$ によって表わされる。ここで x はもちろん x^0, x^1, x^2, x^3 といった時空の座標をもっている。したがって $\varphi(x)$ は x を 1 つ定めたときにヒルベルト空間の演算子を表わすことになる。
いま、物理系が 1 つ与えられたとき、その物理系のラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ というものが与えられる。$\mathscr{L}$ はその物理系に関係のある粒子の場の演算子を $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n$ とするとき $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n$　$\partial_\mu\varphi_1, \cdots\cdots, \partial_\mu\varphi_n$ の多項式の形で表わされるのが普通である。
いま $\mathscr{L}$ を

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi_i(x),\ \partial_\mu\varphi_i(x))$$

とすれば、この物理系のラグランジアン L(t) は

$$L(t) = \int dx^3\, \mathscr{L}(\varphi_i(x),\ \partial_\mu\varphi_i(x))$$
　$\int dx^3$ は空間部分についての積分を意味する

の形で表わされる。
このとき運動の方程式はハミルトンの原理にしたがって

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(t)\, dt = 0$$

である。ここで t_1, t_2 は任意の時間であり、場の変分は t_1, t_2 のところでは 0 になるものとする。
ハミルトンの原理からオイラーの方程式

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi_i} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi_i)}$$

がでてくる。ここで $\dfrac{\delta}{\delta\varphi_i}$ や $\dfrac{\delta}{\delta(\partial_\mu\varphi_i)}$ はそれぞれ φ_i や $\partial_\mu\varphi_i$ による形式的な偏微分と思ってよい。

複素スカラー場　　http://physnd.html.xdomain.jp/field/kleinf2.pdf

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \qquad \bar{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2)$$
　$\varphi_1,\ \varphi_2$ は実

複素スカラー場のラグランジアンは、

$$\mathscr{L} = \partial^\mu\bar{\phi}\,\partial_\mu\phi - m^2\bar{\phi}\phi$$
　ここでは $\partial_\mu{}^2 = \partial_0{}^2 - \nabla^2$

クライン・ゴルドン方程式

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$$

フェルミ粒子

フェルミ粒子（スピン 1/2 のものだけを考える）ψ があるときに $\bar{\psi}$ を

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$$

によって定義する。以下、ψ と $\bar{\psi}$ とを独立な変数と考える（http://www.yam-web.net/science-note/QM1.pdf　page49 参照）。
質量 m のフェルミ粒子が 1 つだけあるときのラグランジアン密度は次の式で与えられる。

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi$$

これで上の処方で運動の方程式を求めれば

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = \frac{i}{2}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi + \frac{i}{2}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$$

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\psi}-\partial_\mu\left(\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)}\right)=-\frac{i}{2}(\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu-m\bar\psi-\frac{i}{2}\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu$$

であるから結論として次の Dirac の方程式を得る。

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0$$

$$i\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu+m\bar\psi=0$$

この２つを次のようにかく

$(i\gamma\cdot\overrightarrow{\partial}-m)\psi=0$　　または　　$(i\overrightarrow{\not\partial}-m)\psi=0$

$\bar\psi(i\gamma\cdot\overleftarrow{\partial}-m)=0$　　または　　$\bar\psi(i\overleftarrow{\not\partial}-m)=0$

ここで $\overleftarrow{\partial}$ は前の $\bar\psi$ を偏微分するという意味である。なぜこのように書くかというと、ψ は 4 次元の縦ベクトル、γ^μ は 4 次元の行列、$\bar\psi$ は $\psi^\dagger\gamma_0$ であるから 4 次元の横ベクトル、したがって $\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu$ を $\gamma^\mu\partial_\mu\bar\psi$ と書くわけにはいかない。$\bar\psi\psi$ の形はあり得るが $\psi\bar\psi$ はあり得ない。この感じを強調しているのが $\bar\psi(i\overleftarrow{\not\partial}-m)=0$ ということになる。

▌リー代数と対称性

ここで、線形リー群 G が与えられていて、物理的状態の作るヒルベルト空間に対する G の元の作用が定義されているものとする。（いろいろな素粒子の場の演算子についての G の作用が定義されている。）

重要なことは、この G の作用によってラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ が不変になるという前提である。

G のリー代数を $\mathfrak{g}$ で表すことにする。そしてこの $\mathfrak{g}$ の生成元を T^j $(j=1,\cdots\cdots,N)$ とする。

$T^1,\cdots\cdots,T^N$ の交換関係は次のような関係をみたしているものとする。

$[T^i, T^j]=i\,c_{ijk}T^k$　　c_{ijk} は構造定数。右辺の k については 1, …… , N についての和がとられているものとする。

$T^1,\cdots\cdots,T^N$ をエルミートにとれば、c_{ijk} は実数になっている。

さらに次の式が成立するように $T^1,\cdots\cdots,T^N$ はとられているものとする。

$\mathrm{Tr}(T^iT^j)=\frac{1}{2}\delta_{ij}$　　規格直交化　　Ⅵ「リー群の具体例 SU(3)」 page1

これは G がコンパクト半単純リー群のときは一般にこのようにとれることが証明される。

たとえば、$\mathfrak{su}(2)$ のときは $T^i=\frac{1}{2}\sigma^i$（パウリ行列）と置けばよいし、$\mathfrak{su}(3)$ については $T^i=\frac{1}{2}\lambda^i$（ゲルマン行列）と置けばよい。

c_{ijk} については、完全反対称となっている。つまり、

$c_{ijk}=-c_{ikj}$, $c_{ijk}=-c_{jik}$ 等

ρ を $\mathfrak{g}$ の表現として、その次元を n とする。$\rho(T^i)=L^i$ とおけばもちろん

$[L^i, L^j]=i\,c_{ijk}L^k$

を満足する。

G の元 U は、

$U(\boldsymbol{\beta})=\exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L})$　　　$\rho(T^i)=L^i$

と表現することができる。

例えば、G の元 U が $\varphi_a(x)$ に与える変換は、

$\varphi_a(x)\longrightarrow U\varphi_b(x)=\exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L})_{ab}\varphi_b(x)$

補論 1

ユニタリ群と特殊ユニタリ群

「ゲージ場の量子論Ⅰ」九後汰一郎著　p138 ,　　https://amonphys.web.fc2.com/amongt.pdf　p12

コンパクト群の表現は、ユニタリ表現となる。そして、このユニタリ群 U(n) は、1 次元群の U(1) と単純群の SU(n) の直積であらわされる。

n 次ユニタリ群 U(n) は、

$A^\dagger A = \delta$

を満たす n 次複素正方行列 A が成す群である。$A = \delta + \epsilon X$ (ϵ は無限小量) とおくと、

$X^\dagger = -X$

を得るので、X は n 次反エルミート行列である。よって T_μ を n 次エルミート行列の基底として、一般解は、

$X = -i\,\theta_\mu T_\mu$　　同じ添え字は和をとる

T_μ は生成子と呼ばれる。n 次エルミート行列の実自由度は n^2 なので、T_μ の個数は n^2 である。便宜上、ギリシャ文字の添字は 0 から n^2-1 まで走るものとしよう。すると U(n) は、

$U(n) = \{ e^{-i\theta_\mu T_\mu} \mid \theta_\mu \in R,\ \mu = 0, 1, \cdots, n^2-1 \}$

と表されることになる。

$n \geq 2$ のとき、生成子の基底 T_μ をさらに次式が成り立つようにとることにする。すなわち $\mu \neq \nu$ のとき、

$tr(T_\mu T_\nu) = 0$　　（規格直交化　$Tr(T_\mu T_\nu) = \lambda\,\delta_{\mu\nu}$ ）

また、T_0 を単位行列に選ぶと、それは全ての正方行列と可換なので、

$U(n) = \{ e^{-i\theta_0} e^{-i\theta_a T_a} \} = U(1) \times \{ e^{-i\theta_a T_a} \}$　　$a = 1, 2, \cdots, n^2-1$　　（A, B が可換なら $e^{A+B} = e^A e^B$）

$tr(T_0 T_a) = 0$ から $tr\,T_a = 0$ なので（T_0 は単位行列)、$e^{-i\theta_a T_a}$ は行列式が 1 で（ 公式 $\det(e^A) = e^{tr(A)}$ ）、その集合は特殊ユニタリ群 SU(n) を成すことがわかる。すなわち $n \geq 2$ のとき、

$U(n) = U(1) \times SU(n)$　　　$SU(n) = \{ e^{-i\theta_a T_a} \mid \theta a \in R,\ a = 1, \cdots, n^2-1 \}$

と直積分解される。(SU(n) の独立なパラメータの数は n^2-1　Ⅵ「具体例 SU(3)」 page1）

生成子 T_a は、$tr(T_a T_b) = \delta_{ab} / 2$ で規格化するのが慣習である。

群 G の部分群 N が、任意の $g \in G$ に対し $g N g^{-1} \subset N$ を満たすとき、N を G の不変部分群と呼ぶ。

G が単位元以外に不変部分群を持たないとき、単純群と呼ぶ。G が単位元以外に可換な不変部分群を持たないとき半単純群と呼ぶ。

上の U(n) の場合は、$\exp(-i\,\theta_0 T_0)$ が U(1) 部分群をなし、明らかに U(n) の中の不変部分群となっている。残りの n^2-1 個の T_0 に直交する生成子 T_a はトレースが 0 で、それらの作る元 $\exp(-i \sum \theta_a T_a)$ は行列式が 1 の特殊ユニタリ群 SU(n) を張る。すなわち、U(n) は U(1) と単純群 SU(n) の直積に分解される。　注釈 01

$U(n) \simeq U(1) \times SU(n)$

コンパクト群（表現はユニタリ表現となる）は、1 次元群と単純群の直積であらわされる。

コンパクトリー代数は、1 次元リー代数と単純リー代数の直和であらわされる。Ⅲ「リー連続群とリー代数」 page2

1 次元リー代数に対応するコンパクトリー群は 1 次元ユニタリ群 U(1) である。

end

▌大域的変換と局所的変換

さてラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ はこの G の変換に関して対称である＝不変であるものとする。

たとえば n 個のフェルミ粒子の場 ψ_a $(a = 1, \cdots\cdots, n)$ や m 個の複素スカラー場 φ_b $(b = 1, \cdots\cdots, m)$ があったとする。ここにスカラー場というのはスピンがないというだけのことである。さらに n 次元のユニタリー表現 ρ と m 次元のユニタリー表現 ρ' があったとして

$\rho(T^i) = L^i$,　$\rho'(T^i) = L'^i$

として ψ_a は L^i で変換され、φ_b は L'^i で変換されるとする。すると、比較的一般的な次の形のラグラジアン密度 $\mathscr{L}$ は G で対称（不変）になっている。

$$\mathscr{L} = \underbrace{\bar{\psi}_a\, i \not{\partial} \psi_a}_{\text{フェルミ粒子場}} + \underbrace{(\partial_\mu \varphi_b)^\dagger \partial^\mu \varphi_b - V(\varphi)}_{\text{複素スカラー場}} + \underbrace{\Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c + \Gamma_{ab}{}^{c*} \varphi_c{}^\dagger \bar{\psi}_b \psi_a}_{\text{相互作用}} \qquad \not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$$

ここで $V(\varphi)$ は $\varphi^\dagger \varphi = \varphi_b{}^\dagger \varphi_b$ の多項式である。

最後の 2 項 $\Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c + \Gamma_{ab}{}^{c*} \varphi_c{}^\dagger \bar{\psi}_b \psi_a$ は Yukawa 項といわれるもので、ψ 場と φ 場との相互作用を表わす項となっている。$\Gamma_{ab}{}^{c*} \varphi_c{}^\dagger \bar{\psi}_b \psi_a$ は $\Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c$ の H.C. (Hermite 共役) である。したがってこの形はしばしば $\Gamma_{ab}{}^c\, \bar{\psi}_a \psi_b \varphi_c$ + H.C. とかかれる。ここでもちろん $\Gamma_{ab}{}^c$ はスカラーであって、さらに G の変換によって $\Gamma_{ab}{}^c$ が Yukawa 項全体が不変になるように変換を受けるものとする。以下、Yukawa 項の影響はほとんどないので多くの場合 Yukawa 項は省略することにする。

上の形が G について対称すなわち不変であることは、たとえば $\varphi^\dagger \varphi$ をとれば

$$\varphi_b^\dagger\varphi_b \;\longrightarrow\; ((e^{-i\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{bc}\varphi_c)^\dagger((e^{-i\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{bd}\varphi_d)=\varphi_c^\dagger(e^{i\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{cb}(e^{-i\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}})_{bd}\varphi_d=\varphi_c^\dagger\delta_{cd}\varphi_d=\varphi_b^\dagger\varphi_b$$

からわかる。ここで表現がユニタリーであることが用いられている。

ここで扱ったような G の変換（x について無関係な変換）で $\mathscr{L}$ が不変なことを、**大域的変換**に対して不変という。（＝ global symmetry）

もっと詳しくいえば、G の元 $U(\boldsymbol{\beta})=\exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L})$ をとったとき $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots\cdots,\beta_N)$ は x に無関係である 。

これに対して、ゲージ理論と呼ばれるものは、$U(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots\cdots,\beta_N)$ を x についての関数 $\boldsymbol{\beta}(x)=(\beta_1(x),\cdots\cdots,\beta_N(x))$ にかえたときどうなるか？ということである。この場合 $\boldsymbol{\beta}(x)$ は x に依存するから、この形の変換について対称（不変）であることを、**局所的変換**について対称（不変）という。（local symmetry）

▍ゲージ場の導入

局所的変換は $U(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{\beta}$ が x に依存するということであった。

$$\varphi_a(x)\;\longrightarrow\;\varphi_a'(x)=[U(\boldsymbol{\beta}(x))]_{ab}\,\varphi_b(x)==[\exp(-i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L})]_{ab}\,\varphi_b(x)\qquad \text{b について和をとる}\qquad ①$$

ラグランジアン密度 $\mathscr{L}$ が G について大局的対称性を満たしているからといって局所的対称性を満たすとはならない。これは上でみた典型的なラグランジアン密度の場合でいえば、$V(\varphi)$ や Yukawa 項はよいのであるが、$\bar{\psi}_a\, i\,\partial\!\!\!/\psi_a$ と $(\partial_\mu\varphi_b)^\dagger\partial^\mu\varphi_b$ では ∂_μ による偏微分があるため $\boldsymbol{\beta}(x)$ の微分が現れてきて対称性が破れてしまうためである。

ゲージ理論では、この対称性の破れを回復するため新しい場＝ゲージ場 $\mathbf{A}(x)$（$A^1,\cdots\cdots,A^N$）を導入することになる。ゲージ場は各点で φ をはかる物指しのようなものであり、これを都合よく操作して対称性を取り戻そうというのである。（以下、一般論で述べていくが、通常はまず簡単な「**U**(1) ゲージ理論」を取り上げて、その後「**SU**(n) ゲージ理論」に進んでいった方が理解しやすいだろう。http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/science004.pdf 参照）

$\varphi_a(x)$ をそのまま x+dx に平行移動して、点 x+dx に用意されているゲージで計られた場を $\varphi_a(x+dx)_\parallel$ と書くことにする。$\varphi_a(x+dx)_\parallel\neq\psi_a(x+dx)$　このとき、dx は十分小さいと考えているので、平行移動後の場と元の場との差は $\varphi_a(x)$ に線形であり、dx に比例していると考えて良いだろう。

すなわち、ある A(x) があって、

$$\varphi_a(x+dx)_\parallel-\varphi_a(x)=i\,g\,[A(x)]_{ab}\,\varphi_b(x)\,dx\qquad \text{b について和をとる}\qquad ②$$

ここで、行列 $(A)_{ab}$ が、点 x から x+dx へ移動したときの“内部空間”の“回転”を指定している。A(x) がゲージ場であり、一般相対論のところで現われる接続 Γ に対応している。A(x) は群 G に対応するリー代数 $\mathfrak{g}$ の生成子の線形結合で書けることが期待されるので、

$$[A(x)]_{ab}=\sum_{i=1}^{\dim G}[A^i(x)\,L_i]_{ab}=\mathbf{A}(x)\cdot\mathbf{L}\qquad \rho(T_i)=L_i$$

と表わされる。こうして、ゲージ場 $\mathbf{A}(x)$ は群 G の次元だけの成分を持つことが理解される 。

▍共変微分

以下、場 $\psi_a(x)$ の添え字 a 等を省略することにする。

x+dx にある場の差

$$\begin{aligned}\psi(x+dx)-\psi_\parallel(x+dx)&=\psi(x)+\partial_\mu\psi(x)-(\psi(x)+i\,g\,A_\mu(x)\,\psi(x))\qquad A(x)=\mathbf{A}(x)\cdot\mathbf{L}\\&=(\partial_\mu\psi(x)-i\,g\,A_\mu(x)\,\psi(x))\,dx^\mu\\&=D_\mu\psi(x)\,dx^\mu\end{aligned}$$

定義　$D_\mu:=\partial_\mu-i\,g\,A_\mu(x)$　　共変微分

を考える。

左辺は x+dx での量なので U(x+dx) で変換される。変換後の量に ′(プライム) を付けて表わすと（$U(x)\psi(x)=\psi'(x)$ などとするということ）、上の式は

$$U(x+dx)(\psi(x+dx)-\psi_\parallel(x+dx))=U(x+dx)(D_\mu\psi(x)\,dx^\mu)$$

となるが、

$$(\text{左辺})=\psi'(x+dx)-\psi'_\parallel(x+dx)=(\partial_\mu\psi'(x)-i\,g\,A'_\mu(x)\,\psi'(x))\,dx^\mu$$

$= (D_\mu\psi)'(x)\,dx^\mu = D'_\mu(x)\psi'(x)\,dx^\mu = D'_\mu(x)U(x)\psi(x)\,dx^\mu$

(右辺) $= U(x+dx)D_\mu\psi(x)\,dx^\mu = U(x)D_\mu\psi(x)\,dx^\mu$　　$U(x+dx) \approx U(x) + \partial U(x)\,dx$

となる。両辺等値すると、$D_\mu(x)$ の変換が得られる。

$D_\mu(x) = \partial_\mu - i\,g\,A_\mu(x)$

$D'_\mu(x) = U(x)D_\mu(x)U(x)^{-1}$　　③

ここで、$U(x) = e^{-i\,\beta^i(x)\,L_i}$、$A_\mu(x) = A^i_\mu(x)\,L_i$ であった。この $D_\mu(x)$ を共変微分と呼ぶ。

この $D_\mu(x)$ の変換から、ゲージ場 $A_\mu(x)$ のゲージ変換が導かれる。ただし、∂ が宙に浮いた状態だと評価できないので、状態関数に作用したもので評価する。

$(D_\mu\psi)' = U\,D_\mu U^{-1}\,\psi' = U\,D_\mu U^{-1}\,U\,\psi = U\,D_\mu\psi$

最左辺 $= (\partial - i\,g\,A)'\,\psi' = (\partial - i\,g\,A)'\,U\,\psi = -\,i\,g\,A'\,U\,\psi + \partial U\,\psi + U\,\partial\psi$

最右辺 $= U\,(\partial - i\,g\,A)\,\psi = U\,\partial\psi - i\,g\,U\,A\,\psi$

以上より、

$-\,i\,g\,A'\,U\,\psi + \partial U\,\psi + U\,\partial\psi = U\,\partial\psi - i\,g\,U\,A\,\psi$

$i\,g\,A'\,U\,\psi = (i\,g\,U\,A + \partial U)\,\psi$

$A' = U\,A\,U^{-1} - \dfrac{i}{g}\,\partial U\,U^{-1}$　　$\partial(U\,U^{-1}) = 0$ なので $\partial U\,U^{-1} = -\,U\,\partial U^{-1}$ でもよい

$A_\mu(x) \to\ A'_\mu(x) = U(x)\,A_\mu(x)\,U^{-1}(x) - \dfrac{i}{g}\,\partial_\mu U(x)\,U^{-1}(x)$　　④

▌場の強さ（曲率）

次に、$x \to x + dx + dy$ への平行移動を、(1) $x \to x + dx \to x + dx + dy$　(2) $x \to x + dy \to x + dx + dy$ の 2 通りの方法で考える（径路の違い）。平行移動を繰り返すと、

(1) $x \to x + dx$

$\psi_{\|}(x + dx) = \psi(x + dx) - D_\mu(x)\psi(x)\,dx^\mu$

$x + dx \to x + dx + dy$

$\psi_{\|}{}^{\|}(x + dx + dy) = \psi_{\|}(x + dx + dy) - D_\nu(x + dx)\psi_{\|}(x + dx)\,dy^\nu$

$= \psi(x + dx + dy) - D_\mu(x + dy)\psi(x + dy)\,dx^\mu$

$-\,D_\nu(x + dx)\psi(x + dx)\,dy^\nu + D_\nu(x + dx)D_\mu(x)\psi(x)\,dx^\mu\,dy^\nu$

(2) $x \to x + dy$

$\psi_{\|}(x + dy) = \psi(x + dy) - D\nu(x)\psi(x)dy\nu$

$x + dy \to x + dx + dy$

$\psi^{\|}{}_{\|}(x + dx + dy) = \psi_{\|}(x + dx + dy) - D_\mu(x + dy)\psi_{\|}(x + dy)\,dx^\mu$

$= \psi(x + dx + dy) - D_\nu(x + dx)\psi(x + dx)\,dy^\nu$

$-\,D_\mu(x + dy)\psi(x + dy)\,dx^\mu + D_\mu(x + dy)D_\nu(x)\psi(x)\,dx^\mu\,dy^\nu$

辺々差をとると、dxdy の次数までで

$\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = \psi^{\|}{}_{\|} - \psi_{\|}{}^{\|} = [\,D_\mu(x)\,,\,D_\nu(x)\,]\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu$

が得られる。両辺 $U(x + dx + dy)$ で変換するが、dxdy の次数までで $(\boldsymbol{\Delta}\psi)'(x) = U(x + dx + dy)\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = U(x)\boldsymbol{\Delta}\psi(x)$ となるので、

$(\boldsymbol{\Delta}\psi)'(x) = U(x)\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = U(x)[\,D_\mu(x)\,,\,D_\nu(x)\,]\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu$

$= U(x)[\,D_\mu(x)\,,\,D_\nu(x)\,]U^{-1}(x)\cdot U(x)\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu$

となる。ここで、

$F_{\mu\nu} = \dfrac{i}{g}\,[\,D_\mu(x)\,,\,D_\nu(x)\,] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - i\,g\,[\,A_\mu(x)\,,\,A_\nu(x)\,]$　　⑤

を導入する。$F_{\mu\nu}$ の変換性は D_μ の変換性③より

$F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)$　　⑥

となることがわかる。こうして、先の式は

$\boldsymbol{\Delta}\psi(x) = -\,i\,g\,F_{\mu\nu}\psi(x)\,dx^\mu dy^\nu$

$(\boldsymbol{\Delta}\psi)'(x) = -\,i\,g\,F'_{\mu\nu}\psi'(x)\,dx^\mu dy^\nu$

となる。

ところで、$F_{\mu\nu}$ は A_μ で書けているので、リー代数 $\mathfrak{g}$ の生成子 $\{L_a\}$ の線型結合で表わされる。

$$F_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^{\dim G} F^a{}_{\mu\nu}(x)\,L_a$$

$$F^a{}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a{}_\nu(x) - \partial_\nu A^a{}_\mu(x) + g\,c_{abc}\,A^b{}_\mu(x)\,A^c{}_\nu(x) \qquad ⑦$$

ここで、2 行目は⑤から交換関係を計算し直接得られる。ここで、c_{abc} はリー代数 $\mathfrak{g}$ の構造定数である。

この $F_{\mu\nu}(x)$、または $F^a{}_{\mu\nu}(x)$ を場の強さ (field strength) と呼ぶ。

▌ゲージ不変なラグランジアン密度の構成

以上の準備より、local symmetry でのゲージ不変なラグランジアン密度を構成することができる。ここでは微分は共変微分に書き換えることになる（一般相対性理論の操作とおなじ)。

物質場の局所位相変換とゲージ場を導入した変換

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = U\,\varphi、A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = U(x)\,A_\mu(x)\,U^{-1}(x) - \frac{i}{g}\,\partial_\mu U(x)\,U^{-1}(x)$$

をゲージ変換と呼ぶことにすると、共変微分を用いた $\bar{\psi}\,i\,D_\psi\psi$ とか $(D_\phi{}^\mu\varphi)^\dagger\,D_{\phi\,\mu}\varphi$ の形のものはこのゲージ変換で不変であることがわかる（対称性＝不変性を回復することができる)。

ここで D_ψ とか D_ϕ とかに分けたのは､ψ と ϕ とで G の表現も変わるかもしれないからである。そのときには D_ψ に導入されるゲージ場 $A^1, \cdots\cdots, A^n$ と D_ϕ に導入されるゲージ場 $B^1, \cdots\cdots, B^m$ とは異なるものであるし（個数も違うのが普通である)、そのとき

$\partial_\mu - i\,g\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}$　　$\partial_\mu - i\,g\,\mathbf{B}_\mu\cdot\mathbf{L}'$　　（$A_\mu = \mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}$　　$B_\mu = \mathbf{B}_\mu\cdot\mathbf{L}'$）

としたときの $\mathbf{L}$、$\mathbf{L}'$ も異なるのが普通である。

例　１個の自由フェルミ粒子（$G = U(1)$ の場合）

ラグランジアン密度 $\mathscr{L}_0$ を

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}\,(\,i\,\not{\partial} - m\,)\,\psi \qquad \not{\partial} = \gamma^\mu\,\partial_\mu$$

として、$G = U(1)$ であって G の元 $U(\beta) = e^{-i\,\beta}$ によって ψ の受ける変換を

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-i\,\beta}\,\psi(x)$$

とすれば、もちろん global symmetry は成立している。

local symmetry（$U = e^{-i\,\beta(x)}$：$\psi(x) \longrightarrow e^{-i\,\beta(x)}\,\psi(x)$）では、ゲージ場 A_μ を導入して、ゲージの共変微分 D_μ を

$$D_\mu = \partial_\mu - i\,g\,A_\mu(x)$$

と定義する。これを使ってラグランジアン密度を次のように書き直す。

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}\,(\,i\,\not{D} - m\,)\,\psi \qquad \not{D} = \gamma^\mu\,D_\mu = \not{\partial} - i\,g\,\not{A}$$

G の元 $U(\beta) = e^{-i\,\beta(x)}$ によって A_μ は

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{g}\,\partial_\mu\beta(x) \qquad \left(A' = U\,A\,U^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U)\,U^{-1} \text{ or } \mathbf{A}_\mu'\cdot\mathbf{L} = U\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\,U^{-1} - \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U)\,U^{-1} \text{ より}\right)$$

という変換を受ける。ここで $\mathbf{L} = 1$, $\partial_\mu e^{-i\,\beta(x)} = -i\,e^{-i\,\beta(x)}\,\partial_\mu\beta(x)$ を用いている。

$D_\mu\psi(x)$ の変換は

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow e^{-i\,\beta(x)}\,D_\mu\psi(x) \qquad ③\text{より } (D_\mu\psi)' = U\,D_\mu U^{-1}\,\psi' = U\,D_\mu U^{-1}\,U\psi = U\,D_\mu\psi$$

である。

これらより、共変微分で書き直した新しいラグランジアン密度

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}\,(\,i\,\not{D} - m\,)\,\psi$$

がゲージ変換で不変であることがすぐわかる。

しかし、この式が新しいラグランジアン密度のすべてではない。A_μ という新しい場が付け加えられたのであるから A_μ の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の部分が加わる。

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

この $F_{\mu\nu}$ がゲージ変換で不変であることは

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu(A_\nu - \frac{1}{g}\partial_\nu\beta(x)) - \partial_\nu(A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta(x)) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

となることから明らかである。

いま付け加えられた場 A_μ が質量が 0 でないとすれば A_μ の質量を表わすラグランジアン密度の項

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{M^2}{2} A_\mu A^\mu$$

質量項については「自発的対称性の破れとヒッグス機構 / ラグランジアンの質量項」参照

を付け加えなければならないが、この項はゲージ変換で不変でないから、ゲージ理論の要請から A は質量 0 の粒子の場であることがわかる。

全体として新しいラグランジアン密度は次の形となる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} + g\not{A} - m)\psi$$

ここでゲージ場 A_μ がゲージ理論によって自動的に得られるのがゲージ理論の長所である。この新しい場 A_μ は質量 0 であるから、その力は遠くにまで到達する。この現象は電磁場の場合はよいが、その他の場合にはそのままでは最終的な結果が得られないことを示している。

一般の G の場合

まず、$G = U(1)$ の場合をみたが、ここでは $G = SU(n)$ の場合を考えることにする。

n 個の場 φ_a $(a = 1, \cdots\cdots, n)$ があって、G の n 次元の表現を ρ として、$\mathfrak{g}$ の生成元 T^i に対して $\rho(T^i) = L^i$ として、T^i, L^i, c_{ijk} については前の条件が満たされているものとする。

さらに G の元 $U(\boldsymbol{\beta}) = \exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L})$ によって φ は

$$\varphi \longrightarrow U(\boldsymbol{\beta})\,\varphi$$

と変換を受け、新しいラグランジアン密度の主な部分は

$$\partial_\mu \Longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - i\,g\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}$$

なる置き換えによって得られる。ここに A_μ は新しく導入された場であり、次の条件をみたす変換 $\mathbf{A}_\mu \longrightarrow \mathbf{A}_\mu'$ を受けるものとする。

$$\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{A}_\mu'\cdot\mathbf{L} = U\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\,U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)\,U^{-1}$$

ここで $\mathbf{A}_\mu'$ の具体的な形を求めることにする。

$[\,L^i, L^j\,] = i\,c_{ijk}\,L^k$、$\boldsymbol{\beta}$ を無限小とすれば、

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} \longrightarrow\ & (1 - i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L})\,\mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L}\,(1 + i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L}) - \frac{i}{g}(-i\,\partial_\mu\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L})(1 + i\,\boldsymbol{\beta}(x)\cdot\mathbf{L}) \\ &= \mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} - i\,\beta^i A_\mu{}^j(L^i L^j - L^j L^i) - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L} \\ &= \mathbf{A}_\mu\cdot\mathbf{L} + \beta^i A_\mu{}^j L^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}\end{aligned}$$

ここで c_{ijk} が完全反対称であることを用いれば、

$$A_\mu{}^i \longrightarrow A_\mu{}^i + \beta^j A_\mu{}^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu\beta^i$$

（この計算のなかでは $\boldsymbol{\beta}$ が無限小なだけでなく、$\partial_\mu\boldsymbol{\beta}$ も無限小であることが仮定されている。もちろん $\boldsymbol{\beta}$ が $\epsilon\boldsymbol{\theta}$ のような形ならばこれはみたされる。）

さてこの一般の場合に新しいラグランジアンを得るためには、新しく導入されたゲージ場 A_μ の運動エネルギーを表わす次の項を付け加えなければならない。

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{i\,\mu\nu} \qquad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

ここで $F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i + g\, c_{ijk}\, A_\mu{}^j\, A_\nu{}^k$　　「量子力学」 page70 &「群論 / 別章 4 ゲージ相互作用 (5)、(7) 式」参照

この $\mathcal{L}_{kin}$ がゲージ変換で不変であることを示しておこう。
ある量 a があったとき、ゲージ変換を受けてできた量を a′ として $\delta a = a' - a$ とかくことにする。
すると上の $A_\mu{}^{i\prime}$ の計算は次の形になる。

$$\delta A_\mu{}^i = \beta^j A_\mu{}^k c_{ijk} - \frac{1}{g}\partial_\mu \beta^i$$

ここで $\delta F^i_{\mu\nu}$ を求めるために次を計算する。（c_{ijk} の完全反対称性や構造定数の公式を使う。）

$$\delta(\partial_\mu A_\nu{}^i - \partial_\nu A_\mu{}^i) = \partial_\mu(\delta A_\nu{}^i) - \partial_\nu(\delta A_\mu{}^i)$$
$$= c_{ijk}\,\beta^j(\partial_\mu A_\nu{}^k - \partial_\nu A_\mu{}^k) + c_{ijk}((\partial_\mu\beta^j)A_\nu{}^k - (\partial_\nu\beta^j)A_\mu{}^k)$$

$$g\, c_{ijk}\,\delta(A_\mu{}^j A_\nu{}^k) = g\, c_{ijk}\,\delta(A_\mu{}^j)\, A_\nu{}^k + g\, c_{ijk}\, A_\mu{}^j\,\delta A_\nu{}^k$$
$$= g\, c_{ijk}\,\beta^l A_\mu{}^m c_{jlm} A_\nu{}^k + g\, c_{ijk} A_\mu{}^j \beta^l A_\nu{}^m c_{klm} - c_{ijk}((\partial_\mu\beta^j)A_\nu{}^k + (\partial_\nu\beta^k)A_\mu{}^j)$$
$$= g\,\beta^l A_\mu{}^j A_\nu{}^m (c_{ikm} c_{klj} + c_{ijk} c_{klm}) - c_{ijk}((\partial_\mu\beta^j)A_\nu{}^k - (\partial_\nu\beta^j)A_\mu{}^k)$$

ここで $c_{ikm} c_{klj} + c_{ijk} c_{klm} = c_{imk} c_{kjl} + c_{ijk} c_{klm} = -c_{ilk} c_{kmj} = c_{ilk} c_{kjm}$

$$= g\,\beta^l c_{ilk} c_{kjm} A_\mu{}^j A_\nu{}^m - c_{ijk}((\partial_\mu\beta^j)A_\nu{}^k - (\partial_\nu\beta^j)A_\mu{}^k)$$

となるから

$$\delta F^i_{\mu\nu} = c_{ijk}\,\beta^j(\partial_\mu A_\nu{}^k - \partial_\nu A_\mu{}^k) + g\,\beta^l c_{ilk} c_{kjm} A_\mu{}^j A_\nu{}^m = c_{ijk}\,\beta^j F^k_{\mu\nu}$$

が得られる。
これから $F^i_{\mu\nu} F^{i\,\mu\nu}$ がゲージ不変であることは次のように c_{ijk} の完全反対称を用いて得られる。

$$F^i_{\mu\nu} F^{i\,\mu\nu} \longrightarrow (F^i_{\mu\nu} + c_{ijk}\beta^j F^k_{\mu\nu})(F^{i\,\mu\nu} + c_{ijk}\beta^j F^{k\,\mu\nu})$$
$$= F^i_{\mu\nu} F^{i\,\mu\nu} + c_{ijk}\beta^j (F^i_{\mu\nu} F^{k\,\mu\nu} + F^k_{\mu\nu} F^{i\,\mu\nu})$$
$$= F^i_{\mu\nu} F^{i\,\mu\nu} \qquad (c_{ijk} + c_{ikj} = 0 \text{ より})$$

これでゲージ場の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項がゲージ不変であることがわかったが、これに対してゲージ場の粒子の質量の項

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} M_{ij}{}^2 A^{i\,\mu} A_\mu{}^j$$

はゲージ不変にならない。したがってゲージ不変を保つためにはゲージボーズ粒子は質量が 0 でなければならない。したがってゲージ粒子の力は遠達力であることになる。これは電磁場には都合がよいが、強い相互作用や弱い相互作用は遠達力ではないのでこのままでは具合が悪い。これを補正するのが Higgs モデルである。「自発的対称性の破れとヒッグス機構 / ヒッグス機構」参照

最後に、もう少しだけ一般論を続けておこう。
フェルミ粒子の場が n 個 $\psi_1, \cdots\cdots, \psi_n$ あり、また複素スカラー場が m 個 $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n$ あるとする。
n 次元の表現 ρ_ψ と m 次元の表現 ρ_φ とがあるときは

$$L_\psi{}^i = \rho_\psi(T^i), \quad L_\varphi{}^i = \rho_\varphi(T^i)$$

と定義し、ψ, φ についてのゲージ変換は

$$\psi_a \longrightarrow \exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}_\psi)_{ab}\,\psi_b = U_\psi(\boldsymbol{\beta})_{ab}\,\psi_b$$
$$\varphi_b \longrightarrow \exp(-i\,\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{L}_\varphi)_{ab}\,\varphi_b = U_\varphi(\boldsymbol{\beta})_{ab}\,\varphi_b$$

の形となる。したがってこれによって導入される $A_{\psi\,\mu}, A_{\varphi\,\mu}, D_{\psi\,\mu}, D_{\varphi\,\mu}$ などすべて ψ と φ とを別々に扱うことになる。
さらに ψ についての変換がカイラル変換のときは

$$L_\psi{}^i = L_L{}^i P_L + L_R{}^i P_R$$

とすればよい。
このように ψ と φ とを分けたときのフェルミ粒子の場と複素スカラー場の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項は

$$\mathcal{L}_{kin} = \bar{\psi}\, i\, D_\psi\, \psi + (D_\varphi{}^\mu \varphi)^\dagger D_{\varphi\,\mu}\varphi$$

となっていて、もちろんゲージ不変である。

スカラー場 φ_b が $\varphi_b = \varphi_b^\dagger$ をみたすとき、φ_b をエルミート・スカラー場という。複素スカラー場 φ は常に

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_R + i\,\varphi_I)$$ 　*R* は実部、*I* は虚数部といった指標

で φ_R と φ_I がエルミート・スカラー場であるように分解することができる。エルミート・スカラー場の方が便利なことが多い。

エルミート・スカラー場の場合の運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項は

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_b)(\partial^\mu \varphi_b)$$

であり、したがってゲージ場を入れてからの運動エネルギーを表わすラグランジアン密度の項は次のものになる。

$$\mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2}(D^\mu \varphi_b)(D_\mu \varphi_b)$$

2、量子電磁力学（QED） U(1) ゲージ場

Maxwell の電磁場理論

Maxwell 理論の作用積分は、

$$S=\int \mathscr{L}\, d^4x=\int [\,-\frac{1}{4}\,(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\,(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\,]\,d^4x \qquad ①$$

電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ に関する変分

$$\delta S=\int [\,-\partial_\mu\,\delta A_\nu\,(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\,]\,d^4x=\int [\,\delta A_\nu\,\partial_\mu\,(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\,]\,d^4x=0$$

から、Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)=0 \qquad \text{ただし、}F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu \qquad ②$$

が得られる。

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{E}=(\,F_{01}\,,F_{02}\,,F_{03}\,),\quad \boldsymbol{B}=(\,-F_{23}\,,-F_{31}\,,-F_{12}\,)$$

と定義され、Maxwell の方程式 ② $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)=0$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\,,\quad \nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}=0$$

を与える。

さらに、$F^{\mu\nu}$ の定義式 $F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ から

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}=0\,,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

が恒等式として得られる。

①の作用積分およびそれから導かれる方程式②は、

$$x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu\,x^\nu+a^\mu$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$, a^μ は定数。$\Lambda^\mu{}_\nu$ はローレンツ変換で、a^μ は座標系の原点のとり方の自由度に対応するもの。

$$A'^\mu(x')\equiv\Lambda^\mu{}_\nu\,A^\nu(x)$$

で定義されるポアンカレ変換のもとで不変である。

①で定義される作用積分は、$\omega(x)$ を任意の関数として次のゲージ変換

$$A_\mu(x)\quad\rightarrow\quad A_\mu{}'(x)\equiv A_\mu(x)+\partial_\mu\omega(x)$$

のもとで不変である。すなわち、

$$F_{\mu\nu}{}'=\partial_\mu(A_\nu+\partial_\nu\omega)-\partial_\nu(A_\mu+\partial_\mu\omega)=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$$

となる。$\omega(x)$ を適当に選ぶと、電磁ポテンシャル A'^μ に Lorentz 条件（あるいは Landau ゲージ）

$$\partial_\mu A'^\mu(x)=\partial_\mu A^\mu(x)+\partial_\mu\partial^\mu\omega(x)=\partial_\mu A^\mu(x)+\Box\omega(x)=0$$

を課すことが可能となる。

量子電磁気学（Maxwell-Dirac 理論）

ここでの議論は、1 節の G = U(1) の例（page6）と同じ内容である。

ディラック場のラグランジアン密度は次のようになる。

$$\mathscr{L}\;=\;\bar{\psi}\,(\,i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu-m\,)\,\psi \qquad ①$$

$\psi(x)$ は 4 成分をもつ場であり、$\bar{\psi}(x)\equiv\psi(x)^\dagger\,\gamma^0$ と定義される。

パウリ行列を用いると、$\gamma^0\;=\;\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ 　$\gamma^k\;=\;\begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix}$ 　$k=1,2,3$

時間成分 γ^0 はエルミート、空間成分 γ^k は反エルミート。

$$\gamma^{0\dagger}\;=\;\gamma^0 \qquad \gamma^{k\dagger}\;=\;-\gamma^k$$

また、その間の交換関係は、

$\gamma^\mu\gamma^\nu\;+\;\gamma^\nu\gamma^\mu\;=\;2\,g^{\mu\nu}$　となる。　$g^{\mu\nu}\;=\;\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$　ミンコフスキー計量

ディラック場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は、U(1) 群をなす位相変換 $\psi'(x) = e^{i\theta}\,\psi(x)$，$\bar{\psi}'(x) = e^{-i\theta}\,\bar{\psi}(x)$ のもとで不変である。しかし、この変換の位相パラメーター θ は全く x^{μ} に依存しない定数であり、それは、これらの複素場の位相を全宇宙、無限の過去から未来まで、一斉にまわすことを意味している。このような大局的変換は不自然であり、むしろ位相パラメーター θ が任意の x 依存性をもつ局所的位相変換

$$\psi'(x) = e^{i\,\theta(x)}\,\psi(x),\ \bar{\psi}'(x) = e^{-i\,\theta(x)}\,\bar{\psi}(x) \qquad ②$$

のほうが自然であると考え、そのもとでの不変性を理論は先験的にもつべきであると要求するのがゲージ理論の立場である。このゲージ原理の要請は、言い換えれば、場の値（複素数）を測る座標軸の設定が時空の各点で独立に行えるべきであると考えるのに等しい。

しかし、θ が x に依存するようになると、微分を含む運動項はもはや不変ではなくなる。すなわち、場の微分 $\partial_{\mu}\psi(x)$ の変換には、

$$\partial_{\mu}\psi(x) \ \to\ \partial_{\mu}\psi'(x) = \partial_{\mu}(e^{i\,\theta(x)}\,\psi(x)) = i\,(\partial_{\mu}\theta(x))\,e^{i\,\theta(x)}\,\psi(x) + e^{i\,\theta(x)}\,\partial_{\mu}\psi(x)$$

のように、$\partial_{\mu}\theta(x)$ の項が現れ、大局的変換の場合のような斉次の変換 $\partial_{\mu}\psi\ \to\ e^{i\theta}\,\partial_{\mu}\psi$ にならない。

このような斉次の変換をする量をつくる微分を共変微分と呼び、その際、ゲージ場（ベクトル場 $A_{\mu}(x)$）の導入が必要となるのである。

すなわち、共変微分 D_{μ} を

$$D_{\mu}\psi(x) \equiv (\partial_{\mu} - i\,e\,A_{\mu}(x))\psi(x) \qquad ③$$

で定義し、ゲージ場の変換を

$$A_{\mu}(x)\ \to\ A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \frac{1}{e}\,\partial_{\mu}\theta(x) \qquad ④$$

とする。すると、共変微分の変換は

$$\begin{aligned}(D_{\mu}\psi(x))' &= (\partial_{\mu} - i\,e\,A'_{\mu}(x))\psi'(x)\\ &= i\,(\partial_{\mu}\theta(x))\,e^{i\,\theta(x)}\,\psi(x) + e^{i\,\theta(x)}\,\partial_{\mu}\psi(x) - i\,(e\,A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\theta(x))\,e^{i\,\theta(x)}\,\psi(x)\\ &= e^{i\,\theta(x)}\,(\partial_{\mu} - i\,e\,A_{\mu}(x))\psi(x)\\ &= e^{i\,\theta(x)}\,D_{\mu}\psi(x)\end{aligned}$$

と、斉次の位相変換となる。

ψ の物質場の局所位相変換②とゲージ場の変換④とをあわせて局所（U(1)）ゲージ変換、あるいは単にゲージ変換と呼ぶ。

共変微分は、したがって、大局的変換の場合と同じ斉次位相変換となるので、大局的位相変換で不変なラグランジアンは、その中の微分 ∂_{μ} を共変微分 D_{μ} に置き換えさえすれば、局所ゲージ不変なラグランジアンとなる。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,[\,i\,\gamma^{\mu}\,(\partial_{\mu} - i\,e\,A_{\mu}) - m\,]\,\psi \qquad ⑤$$

すなわち、ゲージ原理の要請により、ゲージ場 $A_{\mu}(x)$ と物質場 ψ との相互作用の仕方が決まったのである。

ゲージ場自身の運動項もゲージ不変性の要求で決まる。ゲージ場の 1 階微分を含み、ゲージ変換④で不変な量はあきらかに

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \qquad ⑥$$

で、「場の強さ」と呼ばれる。したがって、ゲージ場の運動項は、

$$\mathcal{L}_{\text{ゲージ場}} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} \qquad ⑦$$

で与えられる。

とくに、Dirac 場 ψ が電子、ゲージ場 A_{μ} が電磁場のとき、⑤＋⑦の

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\,(\,i\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - m\,)\,\psi + e\,A_{\mu}\,\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi$$

で記述される系の量子力学は、量子電磁気学（QED : quantum electrodynamics）と呼ばれる。

3、強い相互作用のゲージ理論（QCD）

Yang-Mills 場（非可換ゲージ理論）

ゲージ場の考えを非可換な群 SU(n) に拡張したものは、Yang-Mills 場とよばれる。

Yang と Mills にしたがって２つのフェルミオンを含む場

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \qquad ①$$

から出発する。ここで $\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ はともに通常の 4 成分の Dirac 場とする。

ψ を記述する自由場のラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(\,i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m\,)\,\psi \qquad \bar{\psi}(x) \equiv \psi(x)^\dagger\,\gamma^0 \qquad ②$$

ととる。

②は、$\psi(x)$ の２つの成分を混合する変換

$$\psi'(x) = U\,\psi(x) \qquad ③$$

のもとで形を変えない。

ただし、U は ω^a を定数として

$$U = exp(i\,\omega^a\,T^a\,)\,,\quad U^\dagger\,U = 1$$

$$[\,T^a\,,\;T^b\,] = i\,\epsilon^{abc}\,T^c\,,\quad T^a = \frac{1}{2}\,\tau^a \qquad \tau^a \text{ は pauli 行列}$$

と定義される。反対称シンボル ϵ^{abc} は $\epsilon^{abc} = 1$ と規格化する。

pauli 行列 τ^a で表わされた T^a は角運動量の理論で知られた群 $\boldsymbol{SU(2)}$ の生成演算子を定義する。

変換③のもとで不変であるということは、２つの Dirac 場 ψ_1 と ψ_2 は同等な意味を持ち、同一粒子の 1 と 2 という内部状態（理想化された陽子 p と中性子 n がアイソスピンで区別されるように）を表わしていると考えられる。このように、定数のパラメーター ω^a で記述される対称性は大局的対称性と呼ばれる。

次に、③の変換を時空間の各点で任意に選びうる局所的パラメーター $\omega^a(x)$ に一般化することを考える。このとき、②の質量項は不変にとどまるが、微分を含む運動エネルギーの項はそのままの形では不変ではない。

この場合には、微分を

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i\,g\,A_\mu{}^a(x)\,T^a \equiv \partial_\mu - i\,g\,A_\mu \qquad ④$$

で定義される共変微分に一般化して、③を局所化した変換 $U = exp(i\,\omega^a(x)\,T^a\,)$ と同時に

$$\begin{aligned} D_\mu{}' &= \partial_\mu - i\,g\,A_\mu{}'(x) \\ &\equiv U(x)\,D_\mu\,U(x)^\dagger = \partial_\mu - i\,g\,(\,U\,A_\mu\,U^\dagger + i\,\frac{1}{g}\,U\,\partial_\mu\,U^\dagger\,) \end{aligned} \qquad ⑤$$

と変換することにする。すなわち、

$$\begin{aligned} \psi'(x) &\equiv U(x)\,\psi(x) = exp(i\,\omega^a(x)\,T^a\,)\,\psi(x) \\ A_\mu{}'(x) &= U(x)\,A_\mu(x)\,U(x)^\dagger + i\,\frac{1}{g}\,U(x)\,\partial_\mu\,U(x)^\dagger \end{aligned} \qquad ⑥$$

というゲージ変換を定義すれば、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(\,i\,\gamma^\mu\,D_\mu - m\,)\,\psi \qquad ⑦$$

は不変となる。

このように、大局的対称性を時空間の各点での局所的ゲージ変換に一般化するときに必然的に導入される群の生成演算子と同じ数の（随伴表現に属する）ベクトル場 $A_\mu{}^a(x)$ は Yang-Mills 場と呼ばれている。

次に、

$$\begin{aligned} [\,D_\mu\,,\;D_\nu\,] &= -\,i\,g\,(\,\partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a + g\,\epsilon^{abc}\,A_\mu{}^b\,A_\nu{}^c\,)\,T^a \\ &\equiv -\,i\,g\,F_{\mu\nu}{}^a\,T^a = -\,i\,g\,F_{\mu\nu} \end{aligned} \qquad ⑧$$

と定義すると、⑤から

$$[\,D_\mu{}'\,,\;D_\nu{}'\,] = -\,i\,g\,F_{\mu\nu}{}'^a\,T^a = -\,i\,g\,U(x)\,F_{\mu\nu}{}^a\,T^a\,U(x)^\dagger \qquad ⑨$$

が成立する。行列の跡は $Tr\,T^a\,T^b = (1/2)\,\delta^{ab}$ と規格化されているので Yang-Mills 場のラグランジアンを

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}\,Tr\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}{}^{a}\,F^{a\mu\nu} \qquad ⑩$$

で定義すると、⑨から $\mathcal{L}_{YM}$ はゲージ変換⑥のもとで不変となる。

このゲージ場の考えは、任意のコンパクトで連結な群に一般化できる。コンパクト連結群は、局所的には単純群と $\boldsymbol{U(1)}$ 群の直積の形に書ける。一般の単純群に対しては完全反対称な構造定数 f^{abc} を用いて生成演算子を

$$[\,T^a\,,\ T^b\,] = -\,i\,f^{abc}\,T^c\ ,\quad Tr\,T^a\,T^b = (1/2)\,\delta^{ab} \qquad ⑪$$

で導入すると⑦と⑩の形がそのまま使える。

物理的な応用においては、$\boldsymbol{SU(N)}$ 群に属するゲージ場と $\boldsymbol{U(1)}$ に属する電磁場が重要である。これからの議論でも、N 個の Dirac 場からなる $\psi(x)$ に結合した $\boldsymbol{SU(N)}$ ゲージ場の理論

$$\mathcal{L} \;=\; \bar{\psi}\,i\,\gamma^{\mu}\,(\,\partial_{\mu} - i\,g\,A_{\mu}{}^{a}\,T^{a}\,)\,\psi - m\,\bar{\psi}\,\psi - \frac{1}{4}\,(\,\partial_{\mu}A_{\nu}{}^{a} - \partial_{\nu}A_{\mu}{}^{a} + g\,f^{abc}\,A_{\mu}{}^{b}\,A_{\nu}{}^{c}\,)^{2} \qquad ⑫$$

を典型的な例としてよく用いることになる。

強い相互作用のゲージ理論（QCD : quantum chromodynamics）

「群論 / 別章３ クォークモデル、Ⅵ章 **SU**(3)」参照

核子などの強い相互作用をする粒子（ハドロン）の基本的構成要素は、クォークと呼ばれるスピン 1/2 のフェルミオンであり、現在６つのクォークが確認されている。これらは、down, up, strange, charm, bottom, top の頭文字で記される。

d(−1/3) , u(2/3) , s(−1/3) , c(2/3) , b(−1/3) , t(2/3)　　　①

d(−1/3) は電荷が電子荷電を単位として、−|e|/3 の荷電粒子であることを示す。

クォークを用いると、核子とか中間子は

$$\mathrm{p} = (\mathrm{uud})\ ,\ \ \mathrm{n} = (\mathrm{ddu})\ ,\ \ \Lambda = (\mathrm{sdu})$$

$$\pi^{+} = (\mathrm{u\bar{d}})/\sqrt{2}\ ,\ \ \pi^{0} = (\mathrm{u\bar{u}} - \mathrm{d\bar{d}})/2\ ,\ \ \pi^{-} = (\mathrm{\bar{u}d})/\sqrt{2} \qquad ②$$

$$\eta = (\mathrm{u\bar{u}} + \mathrm{d\bar{d}} - \mathrm{s\bar{s}})/\sqrt{12}\ ,\ \ \eta' = (\mathrm{u\bar{u}} + \mathrm{d\bar{d}} + \mathrm{s\bar{s}})/\sqrt{6}$$

のように模式的に書かれる。フェルミオンである陽子 p とか中性子 n は３個のクォークから、また、π とか η などのボソンである中間子はクォーク q と反クォーク $\bar{\mathrm{q}}$ 対から成る。

これらのクォークの間に働く力を媒介するのが群 **SU**(3) に属する Yang-Mill 場であり、基本的ラグランジアンは

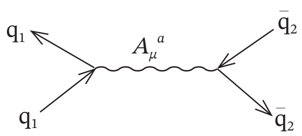
$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{j}\,[\,\bar{q}_j\,i\,\gamma^{\mu}\,(\,\partial_{\mu} - i\,g\,A_{\mu}{}^{a}\,T^{a}\,)\,q_j - m\ \bar{q}_j\,q_j\,] - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}{}^{a}\,F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_g \qquad ③$$

と与えられる。$q_j\ \ (j = 1, \cdots, 6)$ は①の６個のクォークを表わし、$\mathcal{L}_g$ はゲージの固定項および Faddeev-Popov 項である。エルミート行列 T^a は３行３列の **SU**(3) の８個の生成演算子であり、ゲージ場 $A_{\mu}{}^{a}\ \ (a = 1, \cdots, 8)$ は **SU**(3) の随伴表現に属する。

各クォーク q は

$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \mathrm{u}_2 \\ \mathrm{u}_3 \end{pmatrix},\quad \mathrm{d} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{d}_2 \\ \mathrm{d}_3 \end{pmatrix},\quad \cdots \qquad ④$$

といったように、**SU**(3) の基本表現である **3** 表現（$\bar{\mathrm{q}}$ は **3*** 表現）に属する。この q のもつ新しい３つの内部自由度が色の自由度と呼ばれ、その力学が量子色力学（QCD）と呼ばれる。q の色の内部自由度が変化するときにゲージ場 $A_{\mu}{}^{a}$ が放出あるいは吸収され、ゲージ場の交換がクーロン力の一般化を与える。この理由で $A_{\mu}{}^{a}$ はグルーオン（gluon）と呼ばれる。



π 中間子とか核子などの観測される粒子は、すべて色の **SU**(3) の１重項に属する。すなわち、色の自由度は外から

は見えず、すべて無色ということになる。色の自由度を直接運ぶ q とか $A_\mu{}^a$ は外に出てこない。すなわち、クォークの閉じ込めが起こっていることになる。

q と $\bar{q}$ の間に、（電磁気学の）クーロン力において、$e \to gT^a$，$(-e) \to (-gT^{a*})$ と置き換えたような

$$V(r) = \frac{g^2}{4\pi r}\sum_a T^a(-T^a)^* = \frac{g^2}{4\pi r}\,\frac{1}{2}\sum_a \{\,[\,T^a + (-T^{a*})\,]^2 - (T^a)^2 - (T^{a*})^2\,\} \qquad ⑤$$

の力が働く。T^a の規格化 $Tr\,T^a\,T^b = \delta^{ab}/2$ から $\sum_a (T^a)^2 = \sum_a (T^{a*})^2 = 8/6$ であり、群 **SU**(3) の表現論（角運動量の足し算の一般化）から $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$ の 1 重項と 8 重項に対して、それぞれ $\sum_a [\,T^a + (-T^{a*})\,]^2 = 0$ と 3 となり、1 重項には引力、8 重項には斥力が働く。クォークの閉じ込めは、この色の自由度に関して無色の 1 重項に働く引力を極限にまで推し進めたものといえる。

http://www.yam-web.net/science-note/GT.pdf　page69「別章３ クォークモデル」参照
http://www.yam-web.net/science-note/QM2.pdf　page158「補論 4 電弱理論（ワインバーグ - サラム理論）」参照