Ⅶ　ディンキン図形による単純群リー代数の分類

全面的に「群と表現」吉川圭二著に依拠した。

単純群のリー代数の表現はルートが求まるとすべて構成できることを見てきた。では、ルートはどのような種類が存在するのだろうか。ルートは勝手にとれるのではなく、Ⅴ章８節「ルート空間」 page8 〜で述べたような制限がある。この結果、すべての単純リー代数のディンキン図が確定できて、４つの無限シリーズからなる系列と、５つの例外群に分類されてしまう。

ディンキン図　　Ⅴ章９節 page12 より

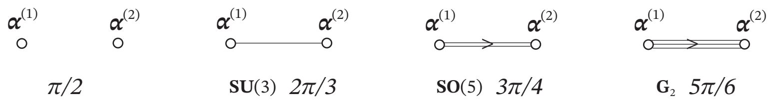
単純ルート $\boldsymbol{\alpha}_i$ と $\boldsymbol{\alpha}_j$ を結ぶ規則として図に示したものを導入する。すなわち $\boldsymbol{\alpha}_i$ と $\boldsymbol{\alpha}_j$ のなす角度 ϕ が

(1) $\phi = \pi/2$ $(\cos^2\phi = 0)$ ならば $\boldsymbol{\alpha}_i$ と $\boldsymbol{\alpha}_j$ は結ばない。

(2) $\phi = 2\pi/3$ $(\cos^2\phi = 1/4)$ ならば $\boldsymbol{\alpha}_i$ と $\boldsymbol{\alpha}_j$ は１本線で結ぶ。

(3) $\phi = 3\pi/4$ $(\cos^2\phi = 2/4)$ ならば $\boldsymbol{\alpha}_i$ と $\boldsymbol{\alpha}_j$ は２本線で結ぶ。

(4) $\phi = 5\pi/6$ $(\cos^2\phi = 3/4)$ ならば $\boldsymbol{\alpha}_i$ と $\boldsymbol{\alpha}_j$ は３本線で結ぶ。



r = 2 のディンキン図

単純ルート

(1) 互いに線形独立な r 個のベクトルの集合である。

(2) もし、$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ が単純ルートなら、$2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})} = -n \leq 0$（０または負の整数）である。Ⅴ章８節 page11 (8-16)

(3) 単純ルート・ベクトルは、２つあるいはそれ以上の互いに直交するベクトルの集合に分離できない。

この最後の条件は、群が単純群（単位元以外に不変部分群を持たない）であることを表わす。ディンキン図でいえば、２つのルートが直交（相互の角度が 90°）する場合は○印の間に線を引かない約束だから、単純群は１つの連結したディンキン図に限られることになる。Ⅴ章９節「ディンキン図」page13 補足参照

これらの条件を満たすルート・ベクトルの集合を「Π 系」と呼ぶことにする。ここでの目的は、この Π 系に属する単純ルートをすべて探し出し、分類することである。

$\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \cdots, \alpha^{(r)}$ を単純ルートとする。それら各ベクトル相互間のなす角度は、Ⅴ章８節 page10 表 8-1 に示される場合に限られている。

単位長にそろえたルート・ベクトルを $\mathbf{u}_i = \alpha^{(i)} / |\alpha^{(i)}|$ とすると、

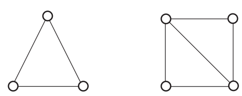
$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = -\sqrt{n/4} \qquad (n = 0, 1, 2, 3)$$

に限られる。n の値はそれぞれ相互角が 90°、120°、135°、150° に対応する。180° の場合は、$\mathbf{u}_i$，$\mathbf{u}_j$ が独立でないことになるから、無視してよい。ディンキン図では、２つの単純ルートの内積関係が整数 n に対応する場合、２つの○印を n 本の線で結ぶ。

単純ルートの集まりで、そのルート･ベクトル間の関係を示すディンキン図について、次の性質が成りたつ。（証明は、補論１参照）

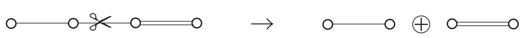
❶ディンキン図にループは許されない。

例えば、次のようなものは禁止される。



また、１つの連結した図の一部にはたかだか２つまで、は１つまでしか許されない。

❷１つの Π 系のディンキン図中で、２つの○印をつなぐ線を切って得られる２つの図は、それぞれ Π 系に含まれる。



❸ 1つの○印に集まる線の数は、たかだか3本までである。

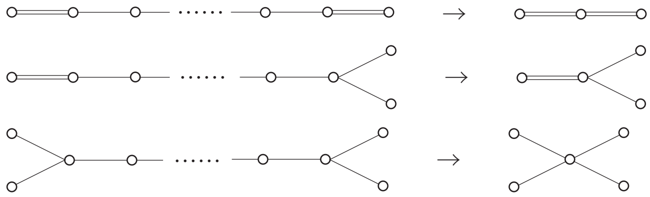
この結果、3本線で結ばれるΠ系は、 に限られる。

次のようなものは禁止　

❹互いに1本線で結ばれたΠ系に含まれる2つの○印を、1つの○印に縮約してできる図はまた Π 系である。

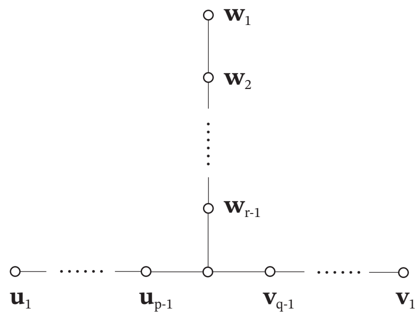
縮約によって禁止される図が出るときは、もとの図も禁止される。

次のようなものはすべて禁止



この段階で、許されるΠ系のディンキン図候補は、かなり絞られてくる。

（図 1）

	G_2
	A_n
	B, C, F
	D, E

❺（図 -1）において（ B, C, F ）系列の中で Π 系として許される図は、$p \geqq q$ として、次の2つの場合に限られる。

1)　p は任意、$q = 1$

2)　$p = q = 2$

この結果、（ B, C, F ）系列で許される図は（図 2）において、B_n 型、C_n 型、F_4 型だけである。

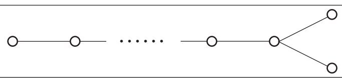
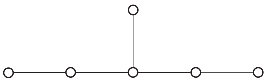
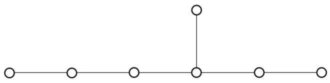
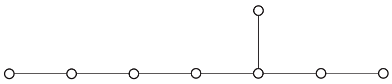
❻（図 -1）の（ D, E ）系列については $p \geqq q \geqq r$ として、次の場合のみが許される。

1)　p は任意、$q = r = 2$

2)　(p, q, r) が次の特別の数値のとき＝ $(3, 3, 2)$、$(4, 3, 2)$、$(5, 3, 2)$。

結局、（ D, E ）系列では（図 2）の D_n、E_6、E_7、E_8 が Π 系として許される。

許されるΠ系のディンキン図（図 2）

A_n		**SU**(n+1)	古典リー群
B_n		**SO**(2n+1)	
C_n		**Sp**(2n)	
D_n		**SO**(2n)	
G_2			例外群
F_4			
E_6			
E_7			
E_8			

補論 1　　注釈 01

単純ルート $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \cdots, \alpha^{(r)}$ を単位長にそろえて $\mathbf{u}_i = \alpha^{(i)} / |\alpha^{(i)}|$ (1)　とすると、

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = -\sqrt{n/4} = -\sqrt{n}/2 \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \quad \text{ディンキン線の本数}) \qquad (2)$$

であった。$\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{u}_j$ を繋ぐディンキン線の本数は、$n = 4\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)^2$ となる。　(3)

$\mathbf{e}_i$ を正規直交系をなす基底ベクトル、すなわち $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ とする。このとき、(1) のベクトル $\mathbf{u}$（規格化されている）が $\mathbf{e}_i$ で展開できるときは、あたりまえに $\sum_i (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) = 1$ である。
ところが基底が足りない場合、$\mathbf{u}$ を展開するためには、$\mathbf{e}_i$ が張る空間の直交補空間への射影を考える必要があり、それらの基底を継ぎ足してはじめて 1 となる。しかし、$\mathbf{e}_i$ だけだと

$$\sum_i (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) < 1 \qquad (4)$$

である。これは❸と❻で利用することになる。

❶「ディンキン図にループは許されない」

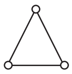
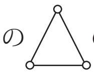
(1) に対して、$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i$ （$i = 1, \cdots, k$　$\mathbf{u}_i$ たちはディンキン線で何らかの形で繋がっているとする）を考えると、

$$0 < (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_i (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) + 2\sum_{i>j} (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = k + 2\sum_{i>j} (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \qquad (5)$$

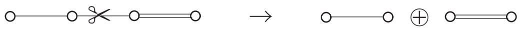
$2\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ は (2) より、$\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$ がディンキン線で繋がっているときは $-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ のいずれかしかないので、

$$2\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \leqq -1$$

となる。

ところが、 などのようにループになっているときは、(5) の最右辺は $k + 2\sum_{i>j} (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \leqq 0$（この  の場合は 0 である）となり、(5) に矛盾する。従って、ループはありえない。
さらに、１つの連結した図の一部に はたかだか２つまで、 は１つまでしか許されないこともわかる。たとえば、 が３つあると、これら３つの $2\,(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ の和だけでも $-\sqrt{2}\times 3$ となり、(5) に矛盾することになる。

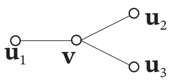
❷「１つの Π 系のディンキン図中で、２つの○印をつなぐ線を切って得られる２つの図は、それぞれ Π 系に含まれる」



２つに切断された図はそれぞれがもとのルート空間の部分空間を構成し、それぞれが部分代数を構成する。

❸「１つの○印に集まる線の数は、たかだか３本までである」

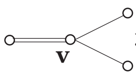
頂点 $\mathbf{v}$ から $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ に向かってディンキン線が出ているとする。ループは存在しないので $i \neq j$（$i = 1, \cdots, k$）なら (2) より $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$ となる。



ここで、(4) の考え方を使う。
単純ルートの独立性より $\mathbf{v}$ は $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ の線型和で書くことが出来ない。$\mathbf{v}$ の $\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_k$ が張る空間の直交補空間への射影を考える。正規化したものを $\mathbf{u}_0$ と書けば、$\mathbf{u}_0, \cdots, \mathbf{u}_k$ は正規直交基底を為す。このとき $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^{k} (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)\,\mathbf{u}_i$ と表せるが、$(\mathbf{v}, \mathbf{u}_0) \neq 0$ である。故に $\mathbf{v}$ より出る重みを込めたディンキン線の本数は (3) より

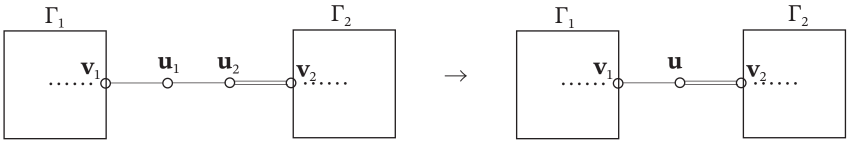
$$\sum_{i=1}^{k} 4\,(\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)^2 < 4\sum_{i=0}^{k} (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i)^2 = 4\,(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 4 \qquad \text{注釈 02}$$

となる。

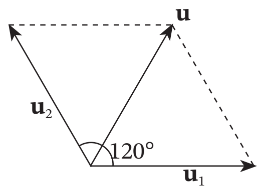
したがって、

などはありえない。

❹「互いに 1 本線で結ばれたΠ系に含まれる 2 つの○印を、 1 つの○印に縮約してできる図はまた Π 系である」



上左図のように繋がれている 2 つの部分図を Γ_1 , Γ_2 とする。Γ_1 に含まれて直接 $\mathbf{u}_1$ に繋がっている規格化されたルート・ベクトルを $\mathbf{v}_1$ 、Γ_2 に含まれて $\mathbf{u}_2$ に繋がるものを $\mathbf{v}_2$ とする（なお $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ は 1 本線で繋がっているものとする)。1 本線で結ばれているルート・ベクトルはともに同一の長さのベクトルであるから（Ⅴ章 8 節　page10 表 8-1)、$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ も $\mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2$ と同じ長さのベクトルである。



$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{u}_2$ 、および $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{v}_2$ は線で結ばれていないから $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{u}_2$ 、および $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{v}_2$ である。すなわち、

$$(\mathbf{v}_1 , \mathbf{u}) = (\mathbf{v}_1 , \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (\mathbf{v}_1 , \mathbf{u}_1)$$

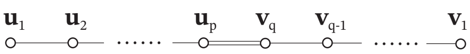
$$(\mathbf{v}_2 , \mathbf{u}) = (\mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (\mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_2)$$

となり角度は保たれている。したがって、$\mathbf{u}\ (\equiv \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ と Γ_1 , Γ_2 で構成される図は Π 系である（図右の縮約した図も許容図形となる)。

❺「(B, C, F) 系列の中でΠ系として許される図は、$p \geqq q$ として、次の 2 つの場合に限られる」

① p は任意、$q = 1$

② $p = q = 2$



ここで、$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} i\,\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{q} j\,\mathbf{v}_j$ を考える。

このとき、

$$(\mathbf{u} , \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{p} i^2 (\mathbf{u}_i , \mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^{p-1} i\,(i+1)\,2\,(\mathbf{u}_i , \mathbf{u}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i\,(i+1) = \frac{1}{2}\,p\,(p+1)$$

↑ 1 本線は 120° なので $(\mathbf{u}_i , \mathbf{u}_{i+1}) = -1/2$、この組み合わせ以外は線なしなので 90° で 0

$$(\mathbf{v} , \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\,q\,(q+1)$$

$$(\mathbf{u} , \mathbf{v}) = (p\,\mathbf{u}_p , q\,\mathbf{v}_q) = pq\,(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

線で結ばれているのは $\mathbf{u}_p , \mathbf{v}_q$ のみ。2 重線なので 135° で $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ここで、シュワルツ（Shwartz）の不等式 $(\mathbf{u} , \mathbf{v})^2 < (\mathbf{u} , \mathbf{u})\,(\mathbf{v} , \mathbf{v})$ から

$$\frac{1}{2}\,p^2q^2 < \frac{1}{2}\,p\,(p+1)\,\frac{1}{2}\,q\,(q+1)$$

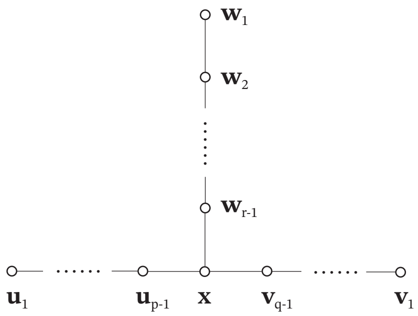
$$2 < (1 + \frac{1}{p})\,(1 + \frac{1}{q})$$

これを満たすのは①と②

❻「(D, E) 系列については $p \geqq q \geqq r$ として、次の場合のみが許される」

① p は任意、$q = r = 2$

② (p, q, r) が次の特別の数値のとき＝ (3, 3, 2)、(4, 3, 2)、(5, 3, 2)



$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p-1} i\,\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{q-1} j\,\mathbf{v}_j$, $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{r-1} k\,\mathbf{w}_k$ を考える。（❺と同じ）

$(\mathbf{u}\,,\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\,p\,(p-1)$　他も同様

$\mathbf{x}$ を長さ 1 のベクトルとする。

$\cos^2(\mathbf{x}\,,\mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{x}\,,\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}\,,\mathbf{u})} = \frac{(p-1)^2/4}{(p(p-1))/2} = \frac{1}{2}\,(1-\frac{1}{p})$　他も同様

これらの和 $\cos^2(\mathbf{x}\,,\mathbf{u}) + \cos^2(\mathbf{x}\,,\mathbf{v}) + \cos^2(\mathbf{x}\,,\mathbf{w})$ は 1 より小さくなければならない *。

したがって、$\frac{1}{2}\,(3-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}) < 1 \quad \to \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > 1$

これを満たすのは①と②

* ❸と同じで、(4) の考え方を使っている。

$\mathbf{x}$ は $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{w}_k$ の線型和で書けないので、これらの張る空間の直交補空間への $\mathbf{x}$ の射影はゼロでない。つまり $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ の正規化を $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/(\mathbf{u},\mathbf{u})^{1/2}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/(\mathbf{v},\mathbf{v})^{1/2}$, $\mathbf{w}' = \mathbf{w}/(\mathbf{w},\mathbf{w})^{1/2}$ とすると、

$$1 = (\mathbf{x},\mathbf{x}) > (\mathbf{x},\mathbf{u}')^2 + (\mathbf{x},\mathbf{v}')^2 + (\mathbf{x},\mathbf{w}')^2$$

を得る。