

VI 具体例 SU(3)

1、SU(3) のリー代数

ユニタリ行列 U ; $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ の作る群のなかで、それに行列式 $\det U = 1$ の条件を加えたものを特殊ユニタリ群という。 $U(3)$ は 3×3 ユニタリ行列の作る群で、それに行列式 $\det U = 1$ の条件を加えた特殊ユニタリ群が $SU(3)$ である。独立なパラメータの数は $2 \times 3^2 - 3^2 - 1 = 8$ となる。(補論 01 page12 参照)

$SU(3)$ 群の具体的な元は、ゲルマン行列と呼ばれる 8 個のエルミート行列 λ_a と、8 個の実パラメータ u^a ($a = 1, 2, \dots, 8$) を用いて

$$U = \exp\left(-i \frac{\lambda_a}{2} u^a\right) \quad (1-1)$$

で表わされる。

ゲルマン行列

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-2)$$

ゲルマン行列 (1-2) の λ_a はいずれもトレースが 0、すなわち

$$\text{Tr}(\lambda_a) = 0 \quad (1-3) \quad SU(n) \text{ のリー代数はトレース 0 の } n \text{ 行 } n \text{ 列エルミート行列の全体である。 (補論 02 page12 参照)}$$

を満たす。これらは、IV「回転群」page7 でみた $SU(2)$ 群に対するパウリ行列の拡張である。 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ は $SU(3)$ の $SU(2)$ 部分群を形成する。これをアイソスピン部分群という。)

この群の生成子、リー代数は慣例上

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (a = 1, 2, \dots, 8) \quad (1-4)$$

が用いられ、これらは

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (1-5)$$

を満たし、次の交換関係を満足する。

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (1-6)$$

ここで、 f_{abc} は $SU(3)$ の構造定数であり、添え字 a, b, c に関して完全反対称である (III「リー連続群とリー代数」page3)。ゼロでない f_{abc} の値は表 1-1 のとおりである。

表 1-1 $SU(3)$ のゼロでない構造定数 f_{abc} a, b, c に関して完全反対称

abc	f_{abc}
123	1
147	1/2
156	-1/2
246	1/2
257	1/2
345	1/2
367	-1/2
458	$\sqrt{3}/2$
678	$\sqrt{3}/2$

ゼロでないカルタン計量は対角成分のみである。

$$g_{ij} = -f_{ilk} f_{jkl} = 3\delta_{ij} \quad (1-7)$$

ゲルマン行列の反交換関係は次式で与えられる。

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = 2 d_{abc} \lambda_c + 4 \delta_{ab}/3 \quad (1-8)$$

ここで、 d_{abc} は添え字 a, b, c に関して完全対称であり、ゲルマン行列を用いて

$$d_{abc} = \text{Tr}(\{\lambda_a, \lambda_b\} \lambda_c) \quad (1-9)$$

と書くことができる。 d_{abc} の値は表 1-2 のとおりである。

表 1-2 a, b, c に関して完全対称な d_{abc} の値

abc	d_{abc}	abc	d_{abc}
118	$1/\sqrt{3}$	355	1/2
146	1/2	366	-1/2
157	1/2	377	-1/2
228	$1/\sqrt{3}$	448	$-1/(2\sqrt{3})$
247	-1/2	558	$-1/(2\sqrt{3})$
256	1/2	668	$-1/(2\sqrt{3})$
338	$1/\sqrt{3}$	778	$-1/(2\sqrt{3})$
344	1/2	888	$-1/\sqrt{3}$

T_i, d_{ijk}, f_{ijk} は次の恒等式を満足する。

$$[T_i, \{T_j, T_k\}] + \{\{T_j, T_i\}, T_k\} + \{\{T_k, T_i\}, T_j\} = 0 \quad (1-10)$$

$$d_{jkl} f_{ilm} + d_{ikm} f_{jil} + d_{jlm} f_{kil} = 0 \quad (1-11)$$

また、次の関係式も成立する。これらは $\mathbf{SU}(3)$ 空間の回転と解釈できる。

$$e^{-2i\theta T_7} T_1 e^{2i\theta T_7} = \cos \theta T_1 + \sin \theta T_4 \quad (1-12)$$

$$e^{-2i\theta T_7} F_2 e^{2i\theta T_7} = \cos \theta T_2 + \sin \theta T_5 \quad (1-13)$$

$$e^{-2i\theta T_7} F_3 e^{2i\theta T_7} = \cos^2 \theta T_3 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta (T_3 + \sqrt{3} T_8) - \sin \theta \cos \theta T_6 \quad (1-14)$$

ここで、 $\theta = \pi/2$ とおくと、 $\mathbf{SU}(2)$ のリー代数 $\{T_1, T_2, T_3\}$ を T_7 について π 回転することによって $\mathbf{SU}(2)_V$ のリー代数 $\{T_4, T_5, (T_3 + \sqrt{3} T_8)/2\}$ が生成されることが分かる。

カルタン部分代数としては対角的な T_3 と T_8 をとることができる（これらは互いに交換する）。

$$H_1 = T_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = T_8 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/6 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \quad (1-15)$$

したがって、 $\mathbf{SU}(3)$ のランクは 2 であり、ルートは 2 次元ベクトルとなる。

随伴表現

$$\{\text{ad}(H_1)\}_{ij} = -i f_{3ij}, \quad \{\text{ad}(H_2)\}_{ij} = -i f_{8ij} \quad (1-16)$$

$$\text{ad}(H_1) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & -1/2 & & & & \\ & & & 1/2 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & 1/2 & & \\ 0 & & & & & -1/2 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ad}(H_2) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & -\sqrt{3}/2 & & & & \\ & & & \sqrt{3}/2 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & -\sqrt{3}/2 & & \\ 0 & & & & & \sqrt{3}/2 & 0 & & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

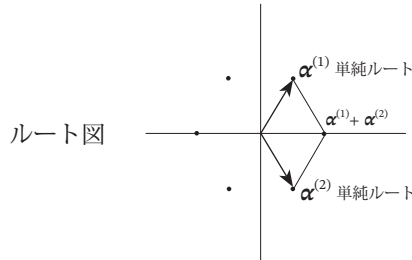
これらの行列は、8 個の固有値と固有ベクトルをもつ。

表 1-3

α_1	α_2	v_α^i
1	0	$1/\sqrt{2} (1, i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
-1	0	$1/\sqrt{2} (1, -i, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$

1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2} (0, 0, 0, 1, i, 0, 0, 0)$
-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2} (0, 0, 0, 1, -i, 0, 0, 0)$
-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2} (0, 0, 0, 0, 0, 1, i, 0)$
1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2} (0, 0, 0, 0, 0, 1, -i, 0)$
0	0	$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
0	0	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$

固有値 (0, 0) は、2 重縮退している。



これから分かるように、正ルートは、 $(1/2, \sqrt{3}/2), (1/2, -\sqrt{3}/2), (1, 0)$

このうち、 $(1, 0)$ は他の 2 つの正ルートの正係数の和 (係数はともに 1) で表されるので、単純ルートではない。残りの 2 つ ($\alpha^{(1)}$ と $\alpha^{(2)}$) は他の 2 つのルートベクトルの正係数の和で書けないので単純ルートである。

よって、単純ルートは、 $\alpha^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ と $\alpha^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ である。 (1-17)

カルタン行列 (V「単純リー代数とルート空間」page13 (9-1)) は、 $C_{ij} = 2 \frac{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(i)})} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (1-18)

V章 page16 (10-12) より基本ウェイトを求めると、

$$\omega^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}), \omega^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}) \quad (1-19)$$

である。

これらを用いてルートを表わしたとき、その係数がルートのディンキン・インデックス (V章 (10-13)) である。

$$\alpha^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\omega^{(1)} - \omega^{(2)} \rightarrow [2, -1] \quad m^{(i)} = 2 \frac{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(1)})}{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(i)})} \quad (V章 (10-10))$$

$$\alpha^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\omega^{(1)} + 2\omega^{(2)} \rightarrow [-1, 2] \quad m^{(i)} = 2 \frac{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(2)})}{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(i)})} \quad (1-20)$$

また、このディンキン・インデックスは、カルタン行列 (1-18) の 1 行目と 2 行目に一致する。(V章 page20 補論 10-1 参照)

カルタン標準形は、 $E_\alpha = v_\alpha^i T_i$ (V章 page7 (7-5))

これに表 6-3 の固有ベクトル v_α^i を代入すると、

$$\begin{aligned} E_{\pm(1,0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm i T_2) & \pm \alpha^{(3)} &= \pm(1, 0) \\ E_{\pm(1/2, \sqrt{3}/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_4 \pm i T_5) & \pm \alpha^{(1)} &= \pm(1/2, \sqrt{3}/2) \\ E_{\mp(1/2, -\sqrt{3}/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_6 \pm i T_7) & \mp \alpha^{(2)} &= \mp(1/2, -\sqrt{3}/2) \end{aligned} \quad (1-21)$$

SU(3) の基本表現 [1, 0] と [0, 1]

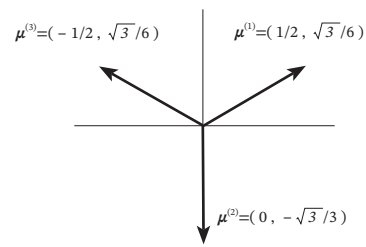
基本表現 [1, 0] (D= 3 次元表現 : 3 表現)

$\mu^{(1)} = \omega^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ が最高ウェイト

H_1 と H_2 の同時固有ベクトルと固有値 (それぞれ h_1 と h_2 とする) = ウェイトの関係は (1-15) から、次のようになる。各ウェイトは表 1-6 参照。

表 1-4

H_1 と H_2 の同時固有ベクトル	固有値 (h_1, h_2) : ウェイト
$(1, 0, 0)$	$\mu^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$
$(0, 0, 1)$	$\mu^{(2)} = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$
$(0, 1, 0)$	$\mu^{(3)} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$

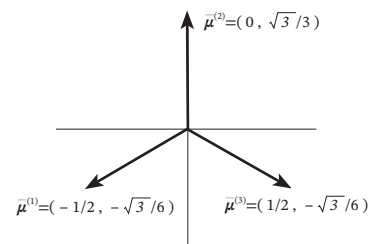


基本表現 $[0, 1]$: 3^* 表現 (3^* 表現としたのは、これが 3 表現の表現行列の複素共役になっていることを示す。(補論 03 page12 参照))

$\bar{\mu}^{(3)} = \omega^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$ が最高ウェイト

表 1-5 注釈 1-1

$-H_1^*$ と $-H_2^*$ の同時固有ベクトル	固有値 (h_1, h_2) : ウェイト
$(1, 0, 0)$	$\bar{\mu}^{(1)} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$
$(0, 0, 1)$	$\bar{\mu}^{(2)} = (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$
$(0, 1, 0)$	$\bar{\mu}^{(3)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$



3 表現、 3^* 表現のディンキン・インデックスとそれに対応するウェイトは、それぞれ最高ウェイト $\mu^{(1)}$ 、 $\bar{\mu}^{(3)}$ から出発して次のように求められる。V章 page17 具体的には、このあと述べるので、ここでは簡略に図示した。

表 1-6

3 表現		3^* 表現	
$\mu^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$	$[1, 0]$	$\bar{\mu}^{(3)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$	$[0, 1]$
↓ $-\alpha^{(1)}$		↓ $-\alpha^{(2)}$	
$\mu^{(2)} = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$[-1, 1]$	$\bar{\mu}^{(2)} = (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$[1, -1]$
↓ $-\alpha^{(2)}$		↓ $-\alpha^{(1)}$	
$\mu^{(3)} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$	$[0, -1]$	$\bar{\mu}^{(1)} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$	$[-1, 0]$

さまざまな規約表現でのウェイト図

単純ルートは、 $\alpha^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ と $\alpha^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ (1-17)

基本ウェイトは、 $\omega^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ 、 $\omega^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$ (1-19)

カルタン行列 $C_{ij} = 2 \frac{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(i)} \cdot \alpha^{(i)})} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ より、単純ルート $\alpha^{(1)}$ 、 $\alpha^{(2)}$ の Dynkin index は $[2, -1]$ 、 $[-1, 2]$

$SU(3)$ の場合、最高ウェイトの Dynkin index は 2 つの成分 $[m^{(1)}, m^{(2)}]$ を持っている。

ここで、 $E_{-\alpha} | \mu, D \rangle = N_{-\alpha} | \mu - \alpha, D \rangle$ (V章 page14 (10-4)) のように、最高ウェイトから始めて単純ルートで下げながら他のウェイトは求めていくことになる。Dynkin index の成分 $m^{(i)}$ は単純ルート $\alpha^{(i)}$ で次のように下げられる。

$$(\mu - \alpha^{(i)} \text{ の Dynkin index}) = (\mu \text{ の Dynkin index}) - (\alpha^{(i)} \text{ の Dynkin index})$$

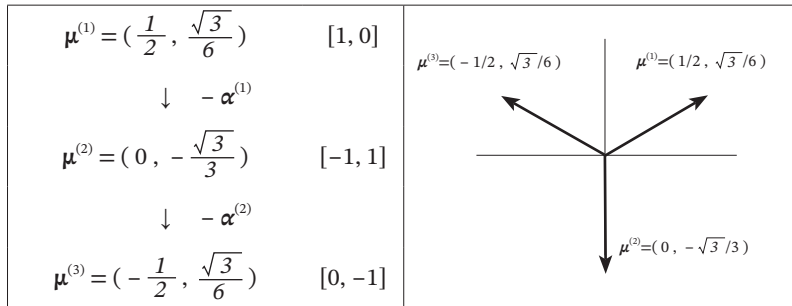
Dynkin index $[m^{(1)}, m^{(2)}]$ では、最高ウェイトは $\mu = \sum_{i=1}^r m^{(i)} \omega^{(i)}$ (V章 page16 (10-13)) である。

1) Dynkin index $[1, 0]$ (基本表現) の場合

最高ウェイトは、 $\mu^{(1)} = \omega^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$

$\mu^{(1)}$ の Dynkin index は $[1, 0]$ なので、単純ルート $\alpha^{(1)}$ で 1 回下げられる。そのときウェイトは $\mu^{(1)} - \alpha^{(1)} = \mu^{(2)}$ となる。このウェイトをもつ新たな状態 $|\mu^{(1)} - \alpha^{(1)}\rangle$ の Dynkin index は $\mu^{(1)}$ の Dynkin index から $\alpha^{(1)}$ の Dynkin index を引き、 $(1, 0) - (2, -1) = (-1, 1)$ となる。

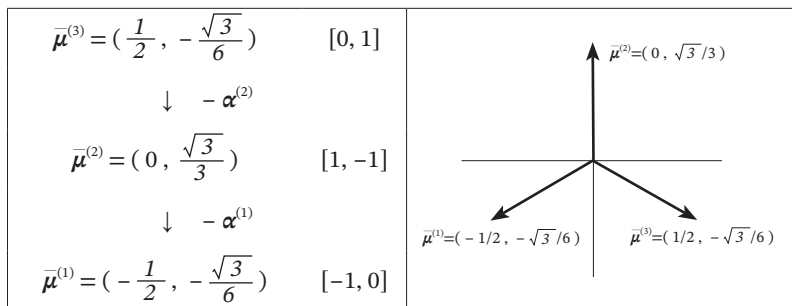
負数は意味が無いので、今度は $E_{-\alpha^{(2)}}$ で 1 回下げられることを意味する ($E_{-\alpha^{(2)}} |\mu^{(1)} - \alpha^{(1)}\rangle$)。よって、新たに $(\mu^{(1)} - \alpha^{(1)}) - \alpha^{(2)} = \mu^{(3)}$ をウェイトとする状態が得られる。このウェイトの Dynkin index は $((1, 0) - (2, -1)) - (-1, 2) = (0, -1)$ となり、これ以上、状態を下げられず、規約表現の状態がすべて求まったことになる。すなわち、最高ウェイト状態 $|\mu^{(1)}\rangle$ と $|\mu^{(1)} - \alpha^{(1)}\rangle = |\mu^{(2)}\rangle$ 、 $|\mu^{(1)} - \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}\rangle = |\mu^{(3)}\rangle$ の 3 つの状態が存在する。状態は 3 つあるので、**3** 表現と呼ばれる。



2) Dynkin index $[0, 1]$ (基本表現)

最高ウェイト $\bar{\mu}^{(3)} = \omega^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6})$

$[1, 0]$ の場合と同様にして、以下のウェイト図が描ける。この表現は **3*** 表現と呼ばれる。



その他の高次元表現もつぎつぎと求めることができる。

$[2, 0] = 6, [0, 2] = 6^*$

$[1, 1] = 8$ 8次元表現は随伴表現に一致する。 注釈 1-2

$[3, 0] = 10, [0, 3] = 10^*$

.....

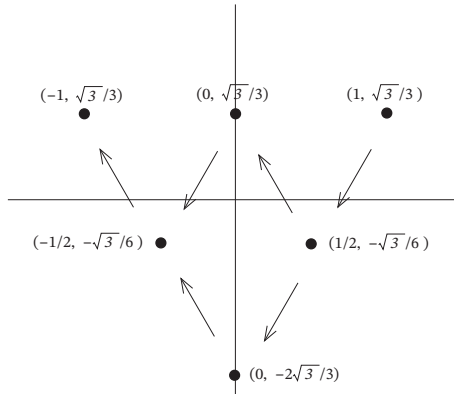
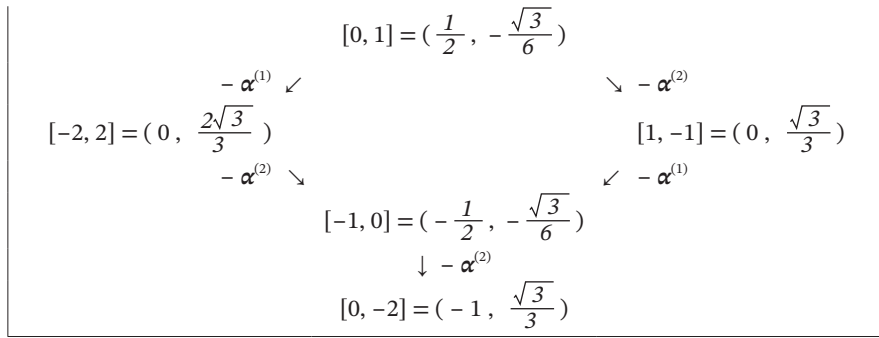
太文字の数字は表現の次元を表わし、* が付いているのは、付いてない表現の複素共役表現になっている。(補論 03 page12 参照)

3) Dynkin index $[2, 0] = 6$

このときの最高ウェイトは、 $(1, \frac{\sqrt{3}}{3}) (= 2\omega^{(1)})$

単純ルート $\alpha^{(1)} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \alpha^{(2)} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ の Dynkin index : $[2, -1], [-1, 2]$

$[2, 0] = (1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ <p style="text-align: center;">↓ $-\alpha^{(1)}$</p>
--



6 表現のウェイト図 (右から左へ降下していく)

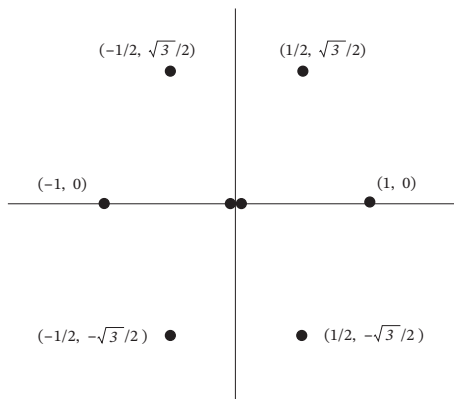
4) Dynkin index [1, 1] = 8

このときには、 $\mu = \omega^{(1)} + \omega^{(2)} = (1, 0)$ が最高ウェイトである。今度はウェイトは 8 つ得られる。ウェイト - ベクトルを 0 とする状態が 2 つあるが、この 2 つの状態は線形独立である。最高ウェイト状態から同じ状態へ 2 通りの下降の仕方があった場合、(たとえばウェイト図の原点へは $|A\rangle = E_{-\alpha^{(1)}} E_{-\alpha^{(2)}} |\mu\rangle$ と $|B\rangle = E_{-\alpha^{(2)}} E_{-\alpha^{(1)}} |\mu\rangle$ の 2 通りの方法で下降できる)、状態 $|A\rangle$ 、 $|B\rangle$ が線形独立かそうでないかは、

$$\det \begin{vmatrix} \langle A|A\rangle & \langle A|B\rangle \\ \langle B|A\rangle & \langle B|B\rangle \end{vmatrix} = \begin{cases} \neq 0 & \text{線形独立である} \\ = 0 & \text{線形独立でない} \end{cases}$$

で判定される。ウェイト図の原点に対応する 2 つの状態は線形独立となっている。

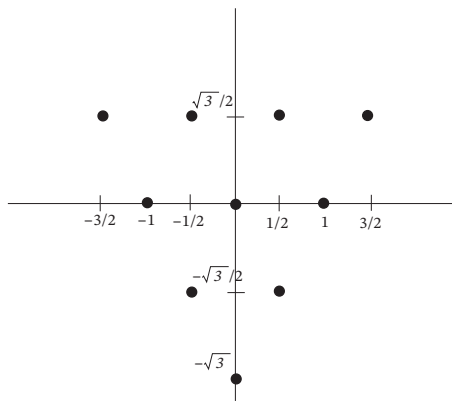
この表現を 8 表現と呼ぶ。(上の 6 表現のときも 1 か所あるが、線形独立ではない=線形従属。)



5) Dynkin index [3, 0] = 10

このときには、 $\mu = 3\omega^{(1)} = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ が最高ウェイトである。今度はウェイトは 10 個得られる。2 通りの下降の仕方得られる状態が複数存在するが、すべて線形従属であり、各ウェイト - ベクトルに対して独立な状態は各々 1 つずつとなっている。

この表現を 10 表現と呼ぶ。



2、直積表現 / 既約表現への分解

リー群あるいはリー代数の既約表現は最高ウェイトによって一意に決まる。そのディンキン・インデックスを $[m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(r)}]$ とすると、この表現は基本表現の直積、あるいは、テンソル積 $m^{(1)}\rho_1 \otimes m^{(2)}\rho_2 \otimes \dots \otimes m^{(r)}\rho_r$ によって与えられる (V章 page17)。ここでは、 $SU(3)$ の任意の既約表現を基本表現のテンソル積を用いて具体的に構成してみる。

$SU(3)$ の基本表現 $\mathbf{3}$ の基底ベクトルは (表 1-4) から

$$\mathbf{e}_1 = \left| \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle, \quad \mathbf{e}_2 = \left| 0, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle, \quad \mathbf{e}_3 = \left| -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle \quad (2-1)$$

で与えられ、これらのベクトルの張る 3 次元空間が $\mathbf{3}$ の表現空間である。この表現空間のベクトルは基底 \mathbf{e}_i を用いて、 $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ と展開できる。

同様に、 $\mathbf{3}^*$ 表現の基底ベクトルは (表 1-5) から

$$\mathbf{e}^1 = \left| \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle, \quad \mathbf{e}^2 = \left| 0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\rangle, \quad \mathbf{e}^3 = \left| -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right\rangle \quad (2-2)$$

で与えられる。

一般に、基本表現のテンソル積の基底ベクトルは

$$\mathbf{e}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} = \mathbf{e}^{i_1} \dots \mathbf{e}^{i_m} \mathbf{e}_{j_1} \dots \mathbf{e}_{j_m} \quad (2-3)$$

と表される。これらの張る mn 次元のベクトル空間がこの直積表現の表現空間である。これらの基底を用いることでこの空間のテンソル \mathbf{v} は次のように展開できる。

$$\mathbf{v} = v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} \mathbf{e}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} \quad (2-4)$$

この表現は一般に既約ではない。

群の変換に対して基底は一般に次のように変換される。

$$\mathbf{e}'_i = U^{\dagger j}_i \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}'^i = U^i_j \mathbf{e}^j \quad (U \in SU(3)) \quad (2-5)$$

$$\mathbf{e}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} = U_{k_1}^{i_1} \dots U_{k_m}^{i_m} U^{\dagger l_1}_{j_1} \dots U^{\dagger l_m}_{j_m} \mathbf{e}_{l_1 \dots l_m}^{k_1 \dots k_m} \quad m \text{ 階反変 } n \text{ 階共変テンソルの「基底の変換則」}$$

これに伴いテンソルの成分は次のように変換される。 <https://www.mynote-jp.com/entry/TensorTransformationRule>

$$v_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} = U^{\dagger l_1}_{i_1} \dots U^{\dagger l_m}_{i_m} U^{k_1}_{j_1} \dots U^{k_m}_{j_m} v_{k_1 \dots k_m}^{l_1 \dots l_m} \quad (2-6) \quad m \text{ 階反変 } n \text{ 階共変テンソルの「テンソル成分の変換則」}$$

この結果から、テンソルの係数がある表示で対称性を持っていると、その対称性は別な表示でも保たれることが分かる。従って、特定の対称性を持ったテンソルの張る空間は、群の変換に対する不変部分空間になっている。直積表現が既約でないということは、その表現空間が群の変換に対していくつかの不変部分空間の直和になっていることを意味している。このことから、テンソル積の成分の対称性を考えることによって直積表現を既約表現に分解することができる。

不変テンソル

3 次の完全反対称テンソル ϵ^{ijk} は $SU(3)$ の変換に対して不変である。

$$\begin{aligned} \text{Levi-Civita の記号 } \epsilon^{ijk} &= +1 \quad (i; j; k) \in (1;2;3);(2;3;1);(3;1;2) \quad \text{偶置換} && \text{(IV「回転群」 page3 参照)} \\ &= -1 \quad (i; j; k) \in (1;3;2);(3;2;1);(2;1;3) \quad \text{奇置換} \\ &= 0 \quad (\text{otherwise}) \end{aligned}$$

$$\epsilon'^{lmn} = U_i^l U_j^m U_k^n \epsilon^{ijk} = (\det U) \epsilon^{lmn} = \epsilon^{lmn}$$

同様に、 ϵ_{ijk} および δ_j^i も $SU(3)$ の変換に対して不変である。これらを**不変テンソル** (invariant tensor) という。

既約分解の具体例

一般に直積によって得られる状態は高次の表現をあたえるが、それらが既約表現になっているとは限らない。先にも述べたように、直積表現が既約でないということは、その表現空間が群の変換に対していくつかの不変部分空間の直和になっていることを意味する。ここでは、直積表現の直和分解（既約表現への分解）の簡単な例をいくつかみておこう。

■ 直積空間 $3 \otimes 3$ の既約分解

この直積空間のテンソルは $v^i v^j$ である。

直積状態 $v^i v^j$ から、対称状態と反対称状態を作る。

$$v^{(i,j)} = \frac{1}{2}(v^i v^j + v^j v^i), \quad v^{[i,j]} = \frac{1}{2}(v^i v^j - v^j v^i)$$

群 $SU(3)$ の変換に対して、対称な状態は対称な状態へと、反対称な状態は反対称な状態へと移り、互いに混じり合うことはない。したがって、 $v^{(i,j)}$ と $v^{[i,j]}$ は、異なる表現に属する。

直積空間のテンソル成分 $v^i v^j$ を、この添え字の交換に対して対称な成分 $v^{(i,j)}$ と反対称な成分 $v^{[i,j]}$ に分ける。

$$v^i v^j = v^i v^j = v^{(i,j)} + v^{[i,j]} = \frac{1}{2}(v^i v^j + v^j v^i) + \frac{1}{2}(v^i v^j - v^j v^i)$$

ij について対称 ij について反対称

$v^{(i,j)}$ は群の変換に対して対称な成分から対称な成分へと移るので、6 次元の不変部分空間を作る（対称な 3 行 3 列の行列は 6 個の独立な成分を持つ）。従って、 $v^{(i,j)}$ は 6 次元の不変部分空間を張り、 $SU(3)$ の既約表現 **6** の表現空間である。

他方、 $v^{[i,j]}$ は 3 次元の不変部分空間のテンソル成分を構成する。今、 ϵ_{ijk} を 3 階の完全反対称テンソルとすると、 $v_k = \epsilon_{ijk} v^{[i,j]}$ は 3^* の変換性を持ち、 3^* の表現空間のテンソルである。

従って、次のような既約表現への分解が得られる。

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

■ $3^* \otimes 3^*$

同様にして、 $3^* \otimes 3^* = 6^* \oplus 3$

■ $3 \otimes 3^*$

この直積空間のテンソルは $v_j^i = v^i v_j$ である。これは次のように分解できる。

$$v_j^i = (v_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i v^k v_k) + \frac{1}{3} \delta_j^i v^k v_k \quad \text{注釈 2-1}$$

ここで右辺の第一項はトレースがゼロの行列であり、8 個の自由度を持つ。第二項は群の変換に対してスカラーとして振る舞う。よって、次の既約分解が得られる。

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

(一般に、 $SU(3)$ の高次元表現は、このように 2 つの基本表現 **3** と 3^* の幾つかの直積をとって構成できる。)

3、テンソルとヤング図

http://epx.phys.tohoku.ac.jp/eeweb/meeting/20120517_biwako_morihori.pdf

量子力学においてスピン 1/2 の合成はスピン 3 重項、1 重項に分けることができる。

$$\text{スピン } 1/2 \times \text{スピン } 1/2 = \text{スピン } 1 + \text{スピン } 0$$

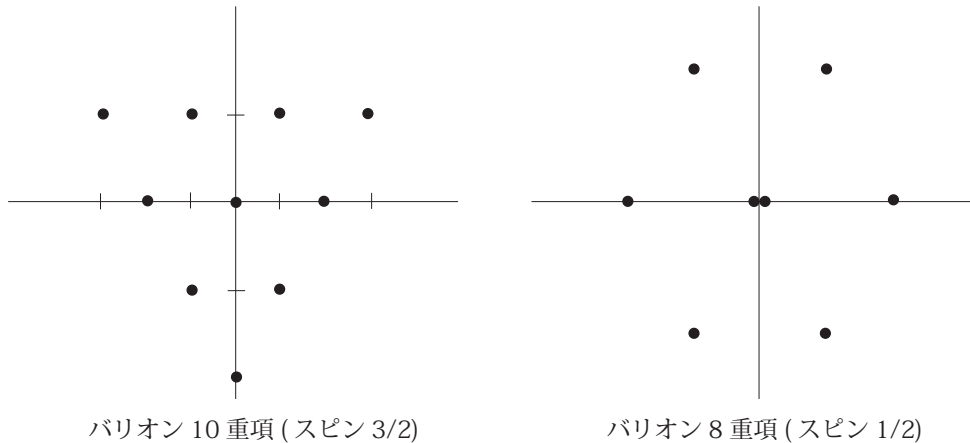
このことをリー群の言葉では $SU(2)$ 群における 2 表現の直積と呼ぶ。またこのように直積表現を既約表現の直和で表すことを既約分解という。既約とは適当な同値変換によってその集合を 2 つ以上の集合の直和にすることができない性質のことを言う。既約分解は合成された物理系の状態から、その状態の構成要素を予測する一つの道具になる。

例) クォークモデルが確立していない時代に、多数見つかっていたバリオンをスピンの値で分類することによって

現代で言うところのバリオン 10 重項、8 重項となるような図形ができあがった。これは

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

の既約分解の式を連想させ、仮想的な構成要素、u,d,s クォークを仮定する要因のひとつになった。



バリオン 10 重項 (スピン 3/2)

バリオン 8 重項 (スピン 1/2)

既約分解の理論

上でみた既約分解は、テンソルを使って直積を次のように分解するものであった。

$3 \otimes 3$: 2つの 3 表現を u^i, v^j として、その積を次のように変形

$$u^i v^j = \frac{1}{2} (u^i v^j + u^j v^i) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} u^l v^m \quad 3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

ij について対称 ij について反対称

$3 \otimes 3^*$: 3 表現を u^i 、 3^* 表現を v_j として、その積を次のように変形

$$u^i v_j = (u^i v_j - \frac{1}{3} \delta_j^i u^k v_k) + \frac{1}{3} \delta_j^i u^k v_k \quad 3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

トレース 0 定数係数付の δ_j^i

このように分けると、それぞれが不変表現空間になり、その直和で表せるようになる。

ヤング図を用いた既約分解

しかし、高次元になっていくと既約な表現を作るのが大変になってくる。

$3 \otimes 8$ の既約分解 http://epx.phys.tohoku.ac.jp/eeweb/meeting/20120517_biwako_morihori.pdf

$$u^i v_k^j = \frac{1}{2} (u^i v_k^j + u^j v_k^i - \frac{1}{4} \delta_k^i u^l v_l^j - \frac{1}{4} \delta_k^j u^l v_l^i) + \frac{1}{4} \epsilon^{ijl} (\epsilon_{lmn} u^m v_n^k + \epsilon_{kmn} u^m v_n^l) + \frac{1}{8} (3 \delta_k^i u^l v_l^j - \delta_k^j u^l v_l^i) \quad 3 \otimes 8 = 15 \oplus 6^* \oplus 3$$

注釈 3-1

これをヤング図を用いると機械的に既約分解できる。

< ヤング図を用いるための準備 >

一般に、 $[n, m]$ 表現の表現空間のテンソル $v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ は n 個の基本表現 $[1, 0]$ のベクトル v^i と m 個の基本表現 $[0, 1]$ のベクトル v_j の直積によって得られるから、上付きの添え字同士の交換、あるいは、下付き同士の交換にたいして対称で、かつ、トレースレスの条件

$$\delta_{i_1}^{j_1} v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} = 0 \quad (3-1)$$

(上下の足 1 個ずつ指定して、その数字をそろえて和をとったとき (いわゆるトレース) は 0 であるとする。) (page11 *2 参照)

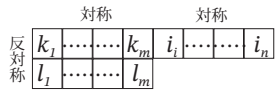
を満たすものが既約表現である。もし、トレースがゼロでないとする、それは $[n-1, m-1]$ 表現に属するから既約性に反する。 注釈 3-2

ϵ^{ijk} を用いて下付きの添え字をすべて上付き添え字に変えることができるから、既約な $[n, m]$ 表現のテンソルは次のように書ける。(テンソル $v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$ を、 ϵ テンソルを用いて下付添え字をすべて上にする。)

$$u^{k_1 l_1 \dots k_m l_m i_1 \dots i_n} = \epsilon^{j_1 k_1 l_1} \epsilon^{j_2 k_2 l_2} \dots \epsilon^{j_m k_m l_m} v_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \quad (u^{[k_1, l_1] \dots [k_m, l_m] i_1 \dots i_n} \text{ と書いたほうが「} k_i, l_i \text{ に関して反対称」がわかりやすいかもしれない})$$

$$(3-2)$$

定義により左辺の量は k_i と l_1, \dots, k_m と l_m の交換に対しては反対称、また、 k_1, \dots, k_m の交換 (k と l のセットの変換 $k_i l_i \leftrightarrow k_j l_j$) あるいは i_1, \dots, i_n の間の交換に対しては対称であり、この対称性の構造は、ヤング図で次のように対応させ、分類することができる。(既約表現の次元については (3-4) 参照)

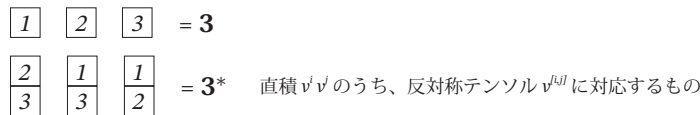
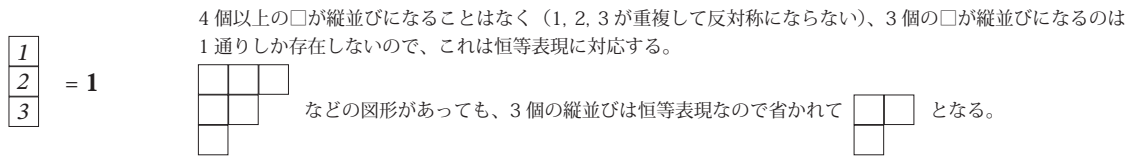


このとき 2 重に数えるのを防ぐために、各行は左から右に数字が大きくなるようにし、左端列においては上から下に数字が大きくなるように配列する。また、各列には同じ数は入らない (重複すると反対称にならない)。

$$k_1 \leq \dots \leq k_m \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \quad (3-3)$$

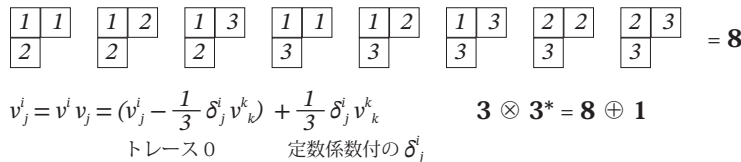
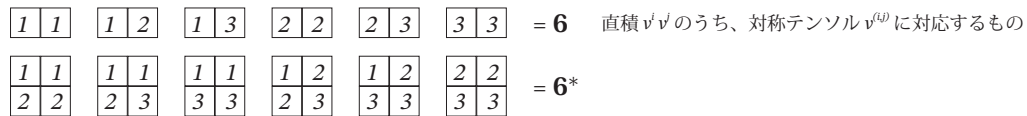
$$l_1 \leq \dots \leq l_m$$

$$k_1 < l_1, \quad k_i \neq l_i$$



$$v^{ij} = v^i v^j = \frac{1}{2} (v^{ij} + v^{ji}) + \frac{1}{2} (v^{ij} - v^{ji}) = \frac{1}{2} (v^{ij} + v^{ji}) + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{klm} v^{lm} \quad 3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*$$

ij について対称 ij について反対称



右辺の第一項はトレースがゼロの行列であり、この項は完全反対称テンソル ϵ^{ijk} を用いて

$$u^{i,jl^k} = \epsilon^{ijl} (v_i^k - \frac{1}{3} \delta_i^k v^m v_m)$$

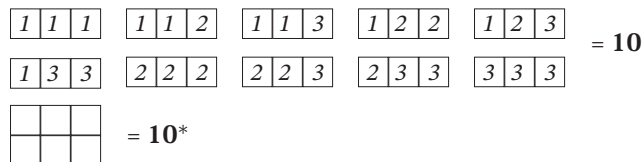
のように表すことができ、8 個の自由度を持つ。この量は定義から分かるように、 i, j について反対称

なので、ヤング図としては

i	k
j	

 が対応する。

第二項は群の変換に対してスカラーとして振る舞う。



< ヤング図を用いた既約分解のルール >

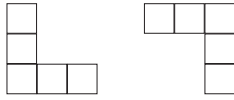
既約表現 α と β の直積 $\alpha \otimes \beta$ を分解する場合を考える。 α と β をヤング図に対応させ (ヤング図 A, B とする) 以下の手順で A の上に B の箱を足していく。

- ① 図形 B の 1 行目のすべての箱に a を書き、2 行目のすべての箱に b を書く。
- ② B の 1 行目から a 箱を取りそれらを A の右側か下側へ 2 つの a が同じ列に来ないように、かつ正当な図形 *

になるようにくっつけていく。

- ③ 2行目のb箱を取り、上でできた図形のそれぞれに対し、2つのbが同じ列に来ないように、正当な図形*になるようにくっつけていく。
- ④ 出来上がった図形を各行に沿って右から左へ、上の行から下の行へ読み進んでいくとき、どの時点でもaの数はbの数を下回ってはならない。

※ 正当な図形でない例



ヤング図は左上詰めで描かなければならない

<ヤング図による既約分解の例>

上記のルールを用いて以下のように記述できる。

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^* \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array}$$

$$3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1 \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline b & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}$$

$$3^* \otimes 3^* = 6^* \oplus 3 \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline b & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & a \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \text{縦に3段あるものは省略してもよい}$$

すべてのルールを用いる必要がある既約分解の例

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 10 \oplus 10^* \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline b & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & b & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & \square & a \\ \hline \square & \square & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & a & \square \\ \hline \square & b & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & b & \square \\ \hline \square & a & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & a \\ \hline \square & \square & b \\ \hline \square & a & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$$

縦に3段あるものは省略してもよい

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus 1$$

上記は $SU(3)$ についての既約分解だが一般の $SU(N)$ もヤング図を用いて既約分解をすることができる。

http://epx.phys.tohoku.ac.jp/eeweb/meeting/20120517_biwako_morihori.pdf

既約表現の次元

ヤング図が与えられた時に、それに対応する既約表現の次元を与える公式を導く。それは、 $[n,m]$ 表現の独立なテンソル成分の数に等しい。 $v_{j_1, \dots, j_m}^{i_1, \dots, i_n}$ において、上付き添え字は 1,2,3 を重複を許して、しかも、(3-3) を満足しつつ並べたものなので、場合の数は ${}_{n+2}C_2$ である*1。同様に、下付き添え字の並び方は ${}_{m+2}C_2$ 通りある。一方、トレースレスの条件 (6-28) は ${}_{m+1}C_2 \times {}_{n+1}C_2$ 個の関係式*2を与えるので、独立なテンソルの数は

$$D(m, n) = {}_{n+2}C_2 \times {}_{m+2}C_2 - {}_{m+1}C_2 \times {}_{n+1}C_2 = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2) \quad (3-4)$$

となる。たとえば、 $[2,2]$ 表現の次元は $D(2, 2) = 27$ 、 $[3,0]$ 表現の次元は $D(3, 0) = 10$ である。

*1 仕切り板を2枚加えて(1,2,3に分割)、n個の区別できない箱を並べる仕方の数は、 ${}_{n+2}C_2 = (n+2)! / (n! 2!)$

*2 上下の足に関してトレースをとったとき0になる条件を考える。上下の足1個ずつ指定したとする。残りの足の並び方の数は ${}_{m+1}C_2 \times {}_{n+1}C_2$ のはずである。これらの並び方すべてに対してトレースは0でなければならないから、条件の数も ${}_{m+1}C_2 \times {}_{n+1}C_2$

補論 01 page1

この行列要素は複素数なので、 $2 \times 3^2 = 18$ 成分持つが、行列 U がユニタリーであることから $U^*U = 1$ より 3^2 の条件式が存在する。また、特殊ユニタリー行列であるので、 $\det U = 1$ よりさらに 1 つ条件が加わり、独立な成分は $18 - 9 - 1 = 8$ となる。

補論 02 page1

[https://ja.wikipedia.org/wiki/跡_\(線型代数学\)](https://ja.wikipedia.org/wiki/跡_(線型代数学)) より

数学、特に線型代数学における行列の跡（トレース）あるいは対角和は行列の主対角成分の総和である。

リー環上の写像として

跡は行列式の微分と対応付けられる。即ち、リー群における行列式のリー環における対応物が跡である。それを示すのが行列式の微分に対するヤコビの公式である。

特に、「単位元 I における微分係数」という特別の場合には

$$\det(I + A) = 1 + \text{tr}(A) + o(A)$$

(o はランダウの記号) という意味で行列式の微分がちょうど跡になる ($\text{tr} = \det'$)。このことから、リー環の間の跡写像とリー環からリー群への指数写像（あるいは具体的に行列の指数関数）との間の関係を

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$$

と書くことができる。

$$\det(U) = 1 \text{ とすると、} \text{tr}(A) = 0$$

補論 03 page4, page5

$SU(3)$ の構造定数は実数なので、 T_i が交換関係 $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ (6-6) を満足すれば、 $-T_i^*$ も同じ交換関係を満足する。従って、 $\rho(T_i)$ が表現ならば $-\rho^*(T_i)$ もまた表現になる。これを ρ の複素共役表現と言い、 ρ^* で表す。

表現 $[0, 1]$ は $[1, 0]$ の複素共役表現である。実際、 T_3, T_8 の固有値は $-T_3^*, -T_8^*$ の固有値である。このことから、表現 ρ のウエイト μ に対して、 $-\mu$ は複素共役表現 ρ^* のウエイトであることが分かる。なぜなら、複素共役表現のカルタン部分代数は $-H_a^*$ であるが、 H_a がエルミートなので、 $-H_a^*$ の固有値は $-H_a$ の固有値に等しい。従って、既約表現の最高ウエイトの符号を変えたものは、複素共役表現の最低ウエイトであり、その逆も真である。 ρ^* と ρ が同等な時、実表現という。実表現のウエイト図は原点に対して対称である。一般に、既約表現 $[n, m]$ の複素共役表現は $[m, n]$ である。なぜならば、 $[n, m]$ 表現の最高ウエイトは $n\mu^{(1)} + m\mu^{(2)}$ 、最低ウエイトは $-n\mu^{(2)} - m\mu^{(1)}$ で与えられるからである。 $[n, n]$ 表現は実表現である。