V　単純リー代数とルート空間

主要には「物理数学 III 講義ノート」上田正仁著より　http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/MP3_14/mp3_note.pdf

リー代数として可能なタイプをすべて列挙することは、途方もなく難しい問題のように思える。しかしルートという概念に着目し、リー代数を標準的な形に書き替えると、リー代数の組織的な分類が可能になる。重要なことは，ルートというベクトルの間の角度が厳しく制限されることである。単純リー代数は、古典的に知られているもの以外には、いくつかの例外的なタイプのものを許すのみである。　「物理のためのリー群とリー代数」窪田高弘著

1　不変部分代数（イデアル）

$\mathfrak{h}$ をあるリー代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数とする。$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の部分代数であるとは、$\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間であって、$^\forall X, {}^\forall Y \in \mathfrak{h}$ ならば $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ が成り立つということである。

線形リー群 H が線形リー群 G の部分群ならば、H のリー代数 $\mathfrak{h}$ は G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数である。

補論 1-1　page18 参照

もしこれよりも強い条件､すなわち $^\forall X \in \mathfrak{h}, {}^\forall Y \in \mathfrak{g}$ に対して $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ が成り立つならば､$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の不変部分代数（あるいはイデアル）であると言う。

不変部分代数（イデアル）の元を指数の肩に乗せると（e^{iX}）、不変部分群が生成される。

（不変部分群：リー群 G が部分群 G_0 をもつとき、G , G_0 の任意の元をそれぞれ g , g_0 とする。このとき $g\, g_0\, g^{-1} \in G_0$ であるとき、G_0 は G の不変部分群であるという。I 章「群論基礎編」 page5）

実際、$\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の不変部分代数のとき、$^\forall X \in \mathfrak{h}$、$^\forall Y \in \mathfrak{g}$ に対して $h = e^{iX}$, $g = e^{iY}$ とおくと、

$g^{-1}\, h\, g = e^{-iY} e^{iX} e^{iY} =: e^{iX'}$ なので、

$X' = -i \ln(e^{-iY} e^{iX} e^{iY}) = X + i\,[X, Y] + [Y, [X, Y]]/2 + \cdots$ が得られる。

$X \in \mathfrak{h}$ なので $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ で、したがって、$[Y, [X, Y]] \in \mathfrak{h}$ である。

同様にして、右辺に現れる高次の項はすべて $\mathfrak{h}$ に属することがいえるので $X' \in \mathfrak{h}$ となり、$e^{iX'}$ は不変部分群に属することがわかる。

$\mathfrak{g}$ 全体および空集合は自明な不変部分代数である。

２つのリー代数 $\mathfrak{k}, \mathfrak{l}$ の任意の元 $^\forall X \in \mathfrak{k}, {}^\forall Y \in \mathfrak{l}$ が互いに可換な時は、X + Y の全体もまたリー代数を構成する。これを $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{l}$ の直和といい、$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{l}$ と表す。

リー代数 $\mathfrak{g}$ に属するすべての元が互いに可換なとき、そのようなリー代数を可換リー代数またはアーベリアン (Abelian) リー代数という。

可換な線形リー群のリー代数はアーベリアンである。

連結線形リー群とリー代数の間には､前者における直積（I 章「群論基礎編」 page8 参照）が後者における和に対応する。

リー群とリー代数の関係について、定理をまとめておくと、

定理 1-1

(1) 連結線形リー群 H が連結線形リー群 G の部分群であるための必要十分条件は、H のリー代数 $\mathfrak{h}$ が G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数であることである。

(2) 連結線形リー群 G の連結な部分群 H が G の不変部分群であるための必要十分条件は、H のリー代数 $\mathfrak{h}$ が G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の不変部分代数であることである。　注釈 1-1

(3) 連結線形リー群 G が連結な部分群 H_1, H_2 の直積 $G=H_1 \otimes H_2$ であるための必要十分条件は、G のリー代数 $\mathfrak{g}$ が H_1, H_2 のリー代数 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ の直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ となることである。

(4) 連結線形リー群 G が可換群であるための必要十分条件は､G のリー代数 $\mathfrak{g}$ がアーベリアンであることである。

リー代数 $\mathfrak{g}$ のすべての元と可換な部分集合 $\mathfrak{c}$ は可換な不変部分代数となる。

$\mathfrak{c}$ に属する任意の元 $X, Y \in \mathfrak{c}$ と $\mathfrak{g}$ の任意の元 A について、$[A, X] = [A, Y] = 0$ が成立するので、ヤコビの恒等式より $[A, [X, Y]] = -[X, [Y, A]] - [Y, [A, X]] = 0$ が成立する。$[X, Y] \in \mathfrak{c}$ となり $\mathfrak{c}$ は部分代数である。

$\mathfrak{c}$ の定義より $\mathfrak{c}$ の任意の元と $\mathfrak{g}$ の任意の元の交換関係はゼロなので $\mathfrak{c}$ に属する。それ故、$\mathfrak{c}$ は可換な不変部分代数である。

この $\mathfrak{c}$ を $\mathfrak{g}$ の中心 (center) という。
線形リー群 G の中心 S（I 章「群論基礎編」 page6）のリー代数 $\mathfrak{c}$ は、群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の中心である。

2　カルタン計量

カルタン計量 (Cartan metric) は、2 つの構造定数の積を縮約することで定義される。

$g_{ab} = C^d{}_{ae}\, C^e{}_{bd}$　　（2 度現れる添え字は和をとる。）

対称性　$g_{ab} = g_{ba}$ を満たす。

リー代数が可換な場合は構造定数がゼロになるのでカルタン計量もゼロである。後に示されるように、カルタン計量は正定値ではなく不定計量である。g_{ab} を行列要素とする行列の行列式がゼロでない場合（正則）は、行列 (g_{ab}) の逆行列が存在するのでその成分を g^{ab} と書こう。逆行列の定義により

$g_{ak}\, g^{kb} = \delta_a{}^b$

が成立する。ここで、$\delta_a{}^b$ は a = b の時 1、それ以外は 0 をとるクロネッカーのデルタ (Kronecker delta) である。
これらを用いて構造定数の添え字を上げ下げすることにしよう。
すなわち、すべて下付きの添え字を持つ量 C_{eab} を

$C_{eab} = C^d{}_{ab}\, g_{ed}$ で定義する。また $C^d{}_{ab} = C_{eab}\, g^{ed}$ となる。

すると、この C_{eab} は 3 個の下付き添え字について完全反対称となる。$C_{abc} = C_{bca} = C_{cab} = -C_{bac} = -C_{acb} = -C_{cba}$

この計量テンソルは随伴表現を用いて書くこともできる。　　注釈 4-1

実際Ⅲ章「リー連続群とリー代数」 page5 で定義された行列 R_a を用いれば、
$g_{ab} = -\mathrm{Tr}(R_a R_b)$ という簡潔な式になる。
あるいは一般的な ad の随伴表現の仕方ならば，$g_{ab} = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X_a)\mathrm{ad}(X_b))$ となる。

3　単純，半単純

次元が 2 以上のリー代数 $\mathfrak{g}$ で、自明（{0} と $\mathfrak{g}$）でない、いかなる不変部分代数をも含まないリー代数を単純リー代数 (simple Lie algebra) という。
可換な不変部分代数 (≠ {0}) を含まないリー代数のことを半単純リー代数 (semi-simpleLie algebra) という。あるいは、単純リー代数の直和で書ける代数は半単純リー代数であるという（これはのちに示される）。

単純、半単純という概念を対応する群について定義することもできる。
群が単位元以外に不変部分群を持たないとき、その群は単純群と呼ぶ。
群が単位元以外に可換な不変部分群を持たないときその群は半単純群と呼ぶ。

後に、半単純リー代数は一般に単純リー代数の直和であることが示せる。これを示すための準備を行う。
（この結果、単純リー代数の表現をすべて求めておけば、半単純リー代数の表現はそれらの直和で与えられることになる＝単純リー群のリー代数の表現さえわかれば、不変部分群をもつ群や半単純群の表現も構成できる。）

リー代数 $\mathfrak{g} = \{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_D\}$ の不変部分代数を $\mathfrak{h} = \{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_r\}$ (r < D) とする。また、i, j, …… は $\mathfrak{h} = \{X_i\}$ の添え字に用いることとし、それ以外はギリシャ文字で α, β …… とし、A, B, …… は全体を指すようにする。
不変部分代数 $\mathfrak{h}$ が可換（アーベリアン）の時は、

$[X_i, X_j] = i\, C^A{}_{ij}\, X_A = 0 \quad \rightarrow \quad C^A{}_{ij} = 0$

$[X_i, X_\alpha] = i\, C^j{}_{i\alpha}\, X_j \in \mathfrak{h} \qquad C^\beta{}_{i\alpha} = 0$

$[X_\alpha, X_\beta] = i\, C^A{}_{\alpha\beta}\, X_A$

これにより、

$\det(g_{AB}) = 0$ となる。　　補論 3-1　page18 参照

つまり、不変部分代数が可換（アーベリアン）の時は、$\det(g_{AB}) = 0$ である。

対偶をとって、$\det(g_{AB}) \neq 0$ であれば、リー代数 $\mathfrak{g}$ の不変部分代数 $\mathfrak{h}$ は可換（アーベリアン）ではなく、リー代数は半単純である。よって、次の定理が成立する。

定理 3-1　リー代数が半単純であるための必要十分条件は、カルタン計量行列が正則である（行列式がゼロでない $\det(g_{ab}) \neq 0$ ）ことである。

単純リー代数は、（自明以外の）不変部分代数を持たないので半単純リー代数の特別な場合である。従って、$\det(g_{ab}) \neq 0$ である。

4　キリング形式　　注釈 4-1

リー代数 $A = a^i X_i$,　$B = b^i X_i$ （X_i はリー代数の基底）の双一次形式をカルタン計量を用いてリー代数の内積を次のように定義する。

$$(A, B) \equiv (a, b) := g_{ij}\, a^i b^j$$

これを**キリング形式** (Killing form) という。

これからカルタン計量はキリング形式を用いて次のように書ける。

$$g_{ij} = (X_i, X_j)$$

キリング形式はリー代数の基底の取り方に依らない。

構造定数の対称性から、リー代数 A, B, C とキリング形式の間に次の関係式が成立することがわかる。

$$(A, [B, C]) = (B, [C, A]) = (C, [A, B]) = i\, g_{kn} C^n{}_{lm}\, a^k b^l c^m = i\, C_{klm}\, a^k b^l c^m \qquad (4\text{-}1)$$　注釈 4-2

以上で準備は整ったので、半単純リー代数が単純リー代数の直和であることを示そう。

定理 4-1　半単純リー代数は単純リー代数の直和で書ける。

【証明】

半単純リー代数とは可換な不変部分代数を含まないリー代数である。したがって、一般には可換でない不変部分代数を含む。そこで、半単純リー代数 $\mathfrak{w}$ の可換でない不変部分リー代数 $\mathfrak{k}$ の任意の元 B とカルタン計量の下で直交する $\mathfrak{w}$ の元の集合を $\mathfrak{k}^{\perp}$ と書こう。

$$\mathfrak{k}^{\perp} := \{A \in \mathfrak{w};\ (A, B) = 0,\ {}^{\forall} B \in \mathfrak{k}\}$$

$\mathfrak{k}^{\perp}$ を $\mathfrak{k}$ の直交補空間 (orthogonal complement) という。また、$\mathfrak{w} = \mathfrak{k} \cup \mathfrak{k}^{\perp}$ である。

$A \in \mathfrak{k}^{\perp}$, $B \in \mathfrak{k}$, $C \in \mathfrak{w}$ とすると、$\mathfrak{k}$ は不変部分代数（イデアル）だから $[B, C] \in \mathfrak{k}$ であることに注意して (4-1) を適用すると

$$(B, [C, A]) = (C, [A, B]) = (A, [B, C]) = 0$$

である。$A \in \mathfrak{k}^{\perp}$,　$[B, C] \in \mathfrak{k}$ なので最後の等式が成立する。

したがって $(B, [C, A]) = 0$ となり、$[C, A] \in \mathfrak{k}^{\perp}$ が結論できる。それゆえ、$\mathfrak{k}^{\perp}$ もまた不変部分代数であることがわかる。

次に、$(C, [A, B]) = 0$ より $[A, B]$ は $\mathfrak{w}$ のすべての元と直交していることがわかる。前節の定理によると半単純リー代数のカルタン計量の行列式はゼロでない。ここで、ベクトル空間 $\mathfrak{w}$ の計量が $\det(g) \neq 0$ であるとき、$\mathfrak{w}$ のすべての元と直交する元は 0 しかないので（下の説明 * 参照)、$[A, B] = 0$ と結論できる。従って、$\mathfrak{w}$ は $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{k}^{\perp}$ の直和 (page1) であることがわかる。

$\mathfrak{k}$ も $\mathfrak{k}^{\perp}$ も共に不変部分代数なので、半単純リー代数 $\mathfrak{w}$ はその不変部分代数の直和に分解できることがわかった。$\mathfrak{k}$ あるいは $\mathfrak{k}^{\perp}$ がさらにその不変部分代数を含んでいるときには、同じ議論をくりかえすことによってそれ以上自明でない不変部分代数を含まない部分代数、すなわち、単純リー代数の直和に分解できる。

*　$\mathfrak{w}$ の基底を X_i $(i = 1, \cdots, d)$ とすると、$\det(g) \neq 0$ のとき $(X_i, X) = 0$（直交）ならば $X = 0$ が言えればよい。
X を基底で $X = x^i X_i$ と展開すると、

$$(X_i, X) = x^j (X_i, X_j) = g_{ij}\, x^j = 0$$

$\det(g) \neq 0$（正則）のときは g は逆行列を持つので、すべての x^i がゼロでなければならない（上の最後の式に逆行列をかけてやる）。ゆえに X = 0 である。

これからいよいよ、リー代数の既約表現を求める作業に入るわけだが、「定理 4-1」のおかげで、これには単純リー代数の表現を求めておけば十分である。それで、これ以降とくにことわらない限り、単純リー代数を取り扱っているものとする。

5　リー代数の随伴表現（再）　Ⅲ章「リー連続群とリー代数」　page4

群 G の表現とは G から **GL**(n,C) への準同型写像 D のことであった。すなわち、群 G の各元 g に n×n の正則行列 D(g) が対応しており、群 G と同じ積の法則を満足する行列の集合 {D(g)} が群 G の表現である。
一般に、リー群とその表現との対応が 1:1 の場合、すなわち、同型写像の場合は、忠実な表現 (faithful representation) という。

同様に、リー代数 𝔴 から **gl**(n, C) への準同型写像 ρ をリー代数の表現という。リー代数の元 A に対応する表現 ρ(A) が作用するベクトル空間は表現空間とよばれ、その次元 d が表現の次元である。特に、リー代数の基底 X_i の表現 $\rho(X_i)$ はリー代数の基底そのものと同じ交換関係

$$[\rho(X_k), \rho(X_l)] = i\, C^m{}_{kl}\, \rho(X_m) \qquad (5\text{-}1)$$

を満足する。
コンパクトリー群の単位元と連結されている元は $g = \exp(i\, t^n X_n)$ のようにリー代数によって与えられるので、その表現 D もリー代数の表現 ρ を用いて次のように書ける。

$$D(g) = \exp(\, i\, t^n \rho(X_n)) \qquad (5\text{-}2)$$

表現行列 $\rho(X_i)$ の行列成分を構造定数 $C^k{}_{ij}$ を用いて

$$\{\rho(X_i)\}^k{}_j = -\, i\, C^k{}_{ij} = -\, \{\rho(X_j)\}^j{}_k \qquad (5\text{-}3)$$

と与えることで、リー代数の表現を得ることができる。これをリー代数の随伴表現 (adjoint representation) といい、$ad(X_i)$ と表記する。

$$ad(X_i) := \rho(X_i)$$

あるいは、行列要素で表示すると (5-3) を用いることで

$$\{ad(X_i)\}^k{}_j = -\, \{ad(X_i)\}^j{}_k = \{\rho(X_i)\}^k{}_j = -\, i\, C^k{}_{ij} \qquad (5\text{-}4)$$

と書ける。これを (5-1) に代入するとヤコビの恒等式が再現されることが確かめられる。

随伴表現を用いるとカルタン計量とキリング形式は次のように書ける。

$$g_{ij} = -\, \mathrm{Tr}\{ad(X_i)\, ad(X_j)\} \qquad (5\text{-}5) \qquad \text{(page2)}$$

$$(A, B) = -\, \mathrm{Tr}\{ad(A)\, ad(B)\} \qquad (5\text{-}6)$$

実際、$ad(X_i)$ の行列要素が $\{ad(X_i)\}^n{}_m = -\, i\, C^n{}_{im}$ で与えられることに注意すると、(5-5) の右辺は $g_{ij} = C^n{}_{im}\, C^m{}_{jn}$ に一致することがわかる。
また、$A = a^i X_i$、$B = b^j X_j$ とおくと、(5-6) の右辺は

$$\begin{aligned} -\, \mathrm{Tr}\{ad(A)\, ad(B)\} &= -\, a^i\, b^j\, \mathrm{Tr}\{ad(X_i)\, ad(X_j)\} \\ &= a^i\, b^j\, C^n{}_{im}\, C^m{}_{jn} = a^i\, b^j\, g_{ij} \\ &= (A, B) \end{aligned}$$

となり、左辺に等しくなることがわかる。(5-5) はカルタン計量が随伴表現の積のトレースで書けることを示している。トレースの循環性 (cyclicproperty of the trace) により、この行列は対称行列であることが分かる。

随伴表現はリー代数の中心を除いて忠実な表現となっている。中心はリー代数のすべての元と可換な不変部分代数の任意の元 X からなるなので、構造定数はゼロであり、したがって、ad(X) = 0 となるからである。半単純リー代数は中心を持たないので、その随伴表現は忠実である。リー代数の随伴表現が与えられた時に、(5-2) で $\rho(X_i) = ad(X_i)$ とおくことによってリー群の表現が得られる。これをリー群 G の随伴表現 Ad(G) という *。これは群の中心

Z を除いて忠実な表現となっている。$g \in Z$ に対しては、Ad(G)=1 となるから、Z は準同型写像 $G \to Ad(G)$ の核である。従って、準同型定理 (Ⅰ章「群論基礎編」　page7) により

$$Ad(G) \cong G/Z$$

である。

リー代数 $X = x^i X_i$， $Y = y^i X_i$， $A = a^i X_i$ を定義すると

$$\begin{aligned}(Y, ad(A)X) &:= y^i g_{ij} \{ad(A)\}^j{}_k x^k \\ &= y^i g_{ij} a^l x^k \{ad(X_l)\}^j{}_k \\ &= i\, y^i g_{ij} a^l x^k C^j{}_{lk} \\ &= y^i a^l x^k (X_i, i\, C^j{}_{lk} X_j) \\ &= y^i a^l x^k (X_i, [X_l, X_k]) \\ &= (Y, [A, X])\end{aligned}$$

よって

$$(Y, ad(A)X) \equiv (y, ad(A)x) = (Y, [A, X])$$

が成立する。これにより随伴表現を

$$ad(A)X \equiv [A, X]$$

と定義することもできる **。 (Ⅲ章「リー連続群とリー代数」　page5 参照)

* リー代数の随伴表現を ad、リー群の随伴表現を Ad と大文字と小文字を使い分けていることに注意。

** 不定計量であっても、それがゼロ固有値を持たない場合は、(Y, A) = (Y, B) がすべての Y に対して成り立てば、A = B が成立する。

6　カルタン部分代数とランク

コンパクトリー群の表現はユニタリであるから、群の元を $U = e^{iX}$ と書くと、ユニタリ条件 $U^\dagger = U^{-1}$ より $X^\dagger = X$ となり、リー代数 X の表現はエルミート行列で表される。

コンパクトリー代数の場合、構造定数 $C^c{}_{ab}$ は実数であり、かつ a, b, c について完全反対称となる。

Ⅲ章「リー連続群とリー代数」　page3

$A = a^i X_i$, $B = b^i X_i$ の時、キリング形式（リー代数の内積）は次のように定義された。page3

$$(A, B) \equiv (a, b) := g_{ij}\, a^i b^j$$

カルタン計量は、キリング形式を用いると次のように書ける。

$$g_{ij} := (X_i, X_j)$$

特定のリー代数を規定するのは、リー代数の生成子 $\{X_i\}$　$i=1, 2, \cdots, d$ の間の交換関係

$$[X_i, X_j] = i\, C^k{}_{ij} X_k$$

である。

ここで、このリー代数の基底 $\{X_i\}$ をうまく選んで、同時に対角化できる（対角行列で表示できる）＝互いに可換な生成子をできるだけ沢山作るようにする。それらを H_a $(a = 1, \cdots, r)$ と書く。　　注釈 6-1

$$[H_a, H_b] = 0 \quad (a, b = 1, \cdots, r) \qquad (6\text{-}1)$$

対応する構造定数は $C^k{}_{ab} = 0$ $(a, b = 1, \cdots, r;\ k = 1, \cdots, d)$ である。コンパクトリー群の構造定数 $C^k{}_{ij}$ は i, j, k について完全反対称であるので、随伴表現の a, b 成分は

$$\{ad(X_k)\}^b{}_a = -i\, C^b{}_{ka} = i\, C^b{}_{ak} = 0 \quad (a, b = 1, \cdots, r\,;\ k = 1, \cdots, d) \qquad (6\text{-}2)$$

で与えられる。

$\{H_a;\ a = 1, \cdots, r\}$ の張る空間はリー代数の部分空間をなす。これを**カルタン部分代数** (Cartan subalgebra)、その次元 r はリー代数の**階数 (rank)** という。すなわち、リー代数のランクは、リー群の一次独立な生成元のうち互いに可換なものの最大個数である。ランクはリー代数の基底の取り方にはよらず、リー代数に固有の量である。

リー代数の随伴表現はリー代数の中心を除いて忠実な表現であるから、コンパクトな単純リー代数の構造は、随伴表現を用いて調べることができる。(6-2) の随伴表現と構造定数の対称性から

$$ad(H_a) = \begin{array}{c|cc} & r & d-r \\ \hline r & \boxed{0} & 0 \\ d-r & 0 & \text{0でない} \end{array} \qquad (6\text{-}3)$$

随伴表現の表現空間はリー代数そのものであるから、$ad(X_k)$ はリー代数のあるベクトル $X = x^i X_i$ から別なベクトル $Y = y^i X_i$ への間の 1 次変換の行列であるとみなすこともできる。すなわち、随伴表現を行列とみなすと、行列 $ad(X_k)$ はベクトル $(x^1, \cdots, x^d)$ からベクトル $(y^1, \cdots, y^d)$ への 1 次変換

$$y^i = \{ad(X_k)\}^i{}_j\, x^j$$

の役割を果たす。

【カルタン部分代数：r 次元空間】

(6-3) よりカルタン部分代数のベクトル $H = h^a H_a$ は、$a = r+1, \cdots, d$ に対しては $h^a = 0$ なので、$ad(H_a)$ によりゼロベクトルに写像される。

$$\{ad(H_a)\}^b{}_c\, h^c = 0$$

すなわち、カルタン部分代数は 1 次写像 $ad(H_b)$ の核である。

【(d−r) 次元空間】

また、$\{X_i,\ i = r+1, \cdots, d\}$ によって張られる (d−r) 次元空間は、1 次変換 $ad(H_a)$(6-3) によってそれ自身に変換される。単純リー代数の場合は、この (d−r) 次元空間は不変部分空間 * である。

* 不変部分空間とは、線形写像 $T: V \to V$ について V の部分空間 W が $T(W) \subset W$ を満たすとき、W を T の不変部分空間と呼ぶ。

以下、この (d−r) 次元空間＝不変部分空間の固有ベクトルと固有値について見ていく。

7　カルタン標準系とルート

これ以降は、次章「具体例 SU(3)」と並行しながら読み解くと分かりやすいだろう。

行列 $ad(H_a)$ $(a = 1, \cdots, r)$ は互いに可換だから、適当に基底を選ぶことによって同時対角化が可能である。随伴表現の定義 $\{ad(X_i)\}^k{}_j = -i\, C^k{}_{ij}$ により $ad(i\, H_a)$ は実交代行列であるから、ゼロでない固有値は複素数となる（補論 7-1 page18）。従って、実行列によって対角化することはできないが、線形代数の定理により適当な直交行列 T（$TT^t = I$）を用いて次のように r × r のゼロ行列と (d−r)×(d−r) の行列にブロック対角化できる（補論 7-1）。すなわち、ゼロ行列でない (d−r) × (d−r) 行列は 2 行 2 列の交代行列の直和で表され、他の行列成分はすべてゼロである。　注釈 7-1

$$T^{-1}\, ad(i\, H_a)\, T = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \begin{matrix} 0 & \alpha^1_a \\ -\alpha^1_a & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} 0 & \alpha^s_a \\ -\alpha^s_a & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad (\alpha \text{ は実数})$$

ここで $a = 1, \cdots, r,\ \ s = (d-r)/2$ である。このことから、d−r が偶数でなければならないことがわかる。これから $ad(i\, H_a)$ の固有値は r 個のゼロと $\pm i\, \alpha^k{}_a$ $(k = 1, \cdots, s = (d-r)/2)$ で与えられることがわかる。（補論 7-1 の例参照）

ゆえに、<u>$ad(H_a)$ の固有値はゼロ（r 個）と実数のペア $\pm \alpha_a$（$(d-r)/2$ ペア）である</u>。

後者に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_{\pm\alpha} = \{v^j{}_{\pm\alpha},\ j = 1, \cdots, d\}$ とすると

$$\{ad(H_a)\}^i{}_j\, v^j{}_\alpha = \alpha_a\, v^i{}_\alpha \qquad (7\text{-}1)$$

$\{ad(H_a)\}^i{}_j$ が純虚数であることに注意して両辺の複素共役をとると

$$\{ad(H_a)\}^i{}_j\, v^j{}_\alpha{}^* = -\alpha_a\, v^i{}_\alpha{}^*$$

従って、

$$\mathbf{v}_{-\alpha} = \mathbf{v}_\alpha{}^* \qquad (7\text{-}2)$$

であることがわかる。

随伴表現と構造定数の関係式は $\{ad(H_a)\}^i{}_j = -i\, C^i{}_{aj}$

ここで H_a は互いに交換するので、d−r 個の固有ベクトルはすべての $ad(H_a)$ $(a = 1, \cdots, r)$ について共通に取ることができる。このとき、<u>共通に取った各同時固有ベクトルに対応する固有値 α_a $(a = 1, \cdots, r)$</u> は r 次元ベクトル空間のベクトルの成分とみなすことができる。このベクトルを $\boldsymbol{\alpha}$ とすると、これをルート (root) あるいはルート・ベクトルという（d−r 個あることになる）。

以上の議論より、$\boldsymbol{\alpha}$ がルートならば、$-\boldsymbol{\alpha}$ もまたルートである。　注釈 7-2

$ad(H_a)$ の 2 つの固有ベクトルを $\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta$ とする。$ad(H_a)\,\mathbf{v}_\alpha = \alpha_a\,\mathbf{v}_\alpha$，　$ad(H_a)\,\mathbf{v}_\beta = \beta_a\,\mathbf{v}_\beta$

$ad(H_a)$ の反対称性より

$\alpha_a\,(\mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{v}_\alpha) = (\mathbf{v}_\beta \cdot ad(H_a)\,\mathbf{v}_\alpha)$

$= (\{ad(H_a)\}^\dagger\,\mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{v}_\alpha)$　　　$\leftarrow$　$(\mathbf{x}\cdot A\mathbf{y}) = (A^\dagger\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$

$= (ad(H_a)\,\mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{v}_\alpha)$　　　$\leftarrow$　$\{ad(H_a)\}^\dagger = ad(H_a)$　　$ad(H_a)$ は純虚数で構成されかつ完全反対称

$= \beta_a\,(\mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{v}_\alpha)$　　　$\leftarrow$　固有値は実数

よって、$(\alpha_a - \beta_a)\,(\mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{v}_\alpha) = 0$ が得られる。従って、固有ベクトルは直交する。

固有ベクトルを 1 に規格化すると

$(\mathbf{v}_\beta \cdot \mathbf{v}_\alpha) = \delta_{\alpha,\beta}$　　(7-3)　　$\alpha_a = \beta_a$ の時に 1、それ以外は 0

ルート $\pm\,\boldsymbol{\alpha}$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}_{\pm\alpha}$ を用いてリー代数の元を

$E_\alpha = v^i{}_\alpha\,X_i$，$E_{-\alpha} = v^i{}_{-\alpha}\,X_i = v^i{}_\alpha{}^*\,X_i$　　(7-5)

のように構成すると (最後の等式で (7-2) を用いた)、$\{H_a, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ はリー代数の新しい基底をなす。これをカルタン標準形という。　注釈 7-3

▌ $g_{ab} = (H_a, H_b) = \sum_\alpha \alpha_a\alpha_b$

固有ベクトルの

完全性 (完備性)　$\sum_\alpha v^i{}_\alpha{}^*\,v^j{}_\alpha = \delta_{ij}$　　（補論 7-2　page20 参照）　　(7-6)

直交性　(7-3)$(\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$　$\rightarrow$　$\sum_i v^i{}_\alpha\,v^i{}_\alpha{}^* = \sum_i v^i{}_\alpha\,v^i{}_{-\alpha} = 1$　　(7-7)

を用いると、カルタン計量は

$g_{ab} = (H_a, H_b)$　　page5

$g_{ab} = \{ad(H_a)\}^i{}_j\,\{ad(H_b)\}^j{}_i$

$= \sum_\alpha \{ad(H_a)\}^i{}_j\,v^j{}_\alpha\,v^k{}_\alpha{}^*\,\{ad(H_b)\}^k{}_i$

$= \sum_\alpha \sum_i \alpha_a\,\alpha_b\,v^i{}_\alpha\,v^i{}_\alpha{}^*$　　　これに (7-7) を適用

$= \sum_\alpha \alpha_a\alpha_b$　　(7-8)　　注釈 7-4

E_α と E_β の内積＝キリング形式は、

$(E_\alpha, E_\beta) \equiv (\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) := g_{ij}\,v^i{}_\alpha\,v^j{}_\beta$　　$g_{ij} := (X_i, X_j)$　　(7-9)　注釈 7-5

▌ $[H_a, E_\alpha] = \alpha_a\,E_\alpha$，　$E_\alpha{}^\dagger = E_{-\alpha}$

(7-1)$\{ad(H_a)\}^i{}_j\,v^j{}_\alpha = \alpha_a\,v^i{}_\alpha$ の両辺に X_i を掛けて i について和をとると左辺は $\{ad(H_a)\}^i{}_j = -\,i\,C^i{}_{aj}$ より

$\{ad(H_a)\}^i{}_j\,v^j{}_\alpha\,X_i = -i\,C^i{}_{aj}\,v^j{}_\alpha\,X_i = [H_a, X_j]\,v^j{}_\alpha = [H_a, E_\alpha]$

他方、右辺は (7-5) より

$\alpha_a\,v^i{}_\alpha\,X_i = \alpha_a\,E_\alpha$

こうして

$[H_a, E_\alpha] = \alpha_a\,E_\alpha$　　(7-10)

を得る。

$E_\alpha{}^\dagger = E_{-\alpha}$ であることは (7-5) からすぐわかることであるが（$X^\dagger = X$ より）、

$[\,H_a, E_\alpha\,] = \alpha_a\,E_\alpha$ のエルミート共役をとってみると、

$[\,H_a, E_\alpha\,]^\dagger = (H_a\,E_\alpha - E_a\,H_\alpha)^\dagger = E_\alpha{}^\dagger\,H_\alpha - H_a\,E_\alpha{}^\dagger = -\,[\,H_a, E_\alpha{}^\dagger\,]$　　$\leftarrow$　$H_\alpha{}^\dagger = H_a$

$(\alpha_a\,E_\alpha)^\dagger = \alpha_a\,E_\alpha{}^\dagger$

$\therefore\ [\,H_a, E_\alpha{}^\dagger\,] = -\,\alpha_a\,E_\alpha{}^\dagger$

これらからも、$E_\alpha{}^\dagger = E_{-\alpha}$　　(7-11)

▌$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_a H_a$

ヤコビの恒等式より

$$[H_a, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] = [E_\alpha, [H_a, E_{-\alpha}]] + [[H_a, E_\alpha], E_{-\alpha}]$$

(7-10) を代入すると右辺は 0 に等しいことが分かる。従って、$[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ は H_a と交換するのでカルタン部分代数に属する。それゆえ、$\{ad(X_i)\}^k{}_j = -\{ad(X_j)\}^j{}_k = \{\rho(X_i)\}^k{}_j = -i\,C^k{}_{ij}$

$$\begin{aligned}
[E_\alpha, E_{-\alpha}] &= v^i{}_\alpha v^j{}_{-\alpha} [X_i, X_j] && \leftarrow \text{(7-5)}\\
&= i\, v^i{}_\alpha v^j{}_{-\alpha} C^a{}_{ij} H_a && \leftarrow [X_i, X_j] = i\, C^a{}_{ij} H_a\\
&= -\sum_j \{ad(H_a)\}^j{}_i v^i{}_\alpha v^j{}_{-\alpha} H_a && \leftarrow \{ad(H_a)\}^j{}_i = -i\, C^j{}_{ai} = -i\, C^a{}_{ij}\\
&= \alpha_a \sum_j v^j{}_\alpha v^j{}_{-\alpha} H_a && \text{これに (7-7) を適用}\\
&= \alpha_a H_a && \text{(7-12)}
\end{aligned}$$

▌$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$

$[H_a, [E_\alpha, E_\beta]]$ についてヤコビの恒等式と (7-10) を用いると

$$[H_a, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha_a + \beta_a)[E_\alpha, E_\beta]$$

が得られる。$\alpha_a + \beta_a$ が $ad(H_a)$ の固有値（すなわち、ルート）であれば、それに対応する固有空間は 1 次元（非縮退）であったから $[E_\alpha, E_\beta]$ は $E_{\alpha+\beta}$ に比例しなければならない。

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \qquad \text{(7-13)}$$

比例定数 $N_{\alpha,\beta}$ は $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ に依存し、$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ がルートでないときはゼロになる。

以上をまとめると、リー代数のランク r の基底であるカルタン標準形 $\{H_a, E_\alpha, E_{-\alpha}\}$ は次の交換関係に従うことがわかった。

$$\left.\begin{aligned}
&[H_a, H_b] = 0 \quad (a, b = 1, \cdots, r) \ \text{(6-1)}\\
&[H_a, E_{\pm\alpha}] = \pm\alpha_a E_{\pm\alpha}\\
&[E_\alpha, E_\beta] \text{ については、}\\
&\qquad [E_\alpha, E_{-\alpha}] \text{ のときは、} [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_a H_a\\
&\qquad \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \text{ がルートのときは、} [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}\\
&\qquad \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \text{ がルートでないときは、} [E_\alpha, E_\beta] = 0\\
&E_\alpha{}^\dagger = E_{-\alpha}
\end{aligned}\right| \qquad \text{(7-14)}$$

$$(H_a, H_b) = g_{ab} = \sum_\alpha \alpha_a \alpha_b$$

このように元の X_i に対する交換関係 $[X_i, X_j] = i\, C^k{}_{ij} X_k$ における構造定数に対して、新しい基底であるカルタン標準形の交換関係はルート α_a と定数 $N_{\alpha,\beta}$ によって決まる。

(7-14) をみると、カルタン標準形は角運動量演算子の代数に良く似ていることが分かる。H_a は J_z に、$E_{\pm\alpha}$ は昇降演算子 $J_\pm$ に類似した役割を果たしていることがわかる。この **SU**(2) との類似性を利用してコンパクトリー代数の分類がなされる。　「物理でつかう数学 / 昇降演算子」参照

8　ルート空間

【$N_{\alpha,\beta}$ の決定】

カルタン標準形 (7-14) では、リー代数の構造はルート $\boldsymbol{\alpha}$ と $N_{\alpha,\beta}$ で決まるが、以下で示すように $N_{\alpha,\beta}$ もルートによって決まる。従って、リー代数の構造はルートによって完全に決定される。

まず、交換関係

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} \ \text{(7-13)}$$

において α と β を交換すれば $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$ が得られ、また、そのエルミート共役を考え、$E_\alpha{}^\dagger = E_{-\alpha}$ (7-11) であるこ

とに注意すると $N_{\alpha,\beta}{}^* = - N_{-\alpha,-\beta}$ が得られる。

$N_{\alpha,\beta} = - N_{\beta,\alpha} = - N_{-\alpha,-\beta}{}^*$　　(8-1)

次に、$E_\alpha, E_\beta, E_{-\alpha-\beta}$ に対してヤコビの恒等式を作ると

$[E_\alpha, [E_\beta, E_{-\alpha-\beta}]] + [E_\beta, [E_{-\alpha-\beta}, E_\alpha]] + [E_{-\alpha-\beta}, [E_\alpha, E_\beta]] = 0$

ここで、(7-14) の 3 番目と 4 番目の関係式を使い、$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ が独立なルート $((\alpha+\beta)_a = \alpha_a + \beta_a)$ であることに注意すると

$[\alpha_a N_{\beta,-\alpha-\beta} + \beta_a N_{-\alpha-\beta,\alpha} - (\alpha_a + \beta_a) N_{\alpha,\beta}] H_a = 0$

ここで、$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ は独立なルートなので α_a と β_a の係数をそれぞれ独立に 0 とおくことができる。ゆえに

$N_{\alpha,\beta} = N_{\beta,-\alpha-\beta} = N_{-\alpha-\beta,\alpha}$　　(8-2)

同様にして $E_\alpha, E_{-\alpha}, E_\beta$ にヤコビの恒等式を適用する

$[E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, E_{-\alpha}]] + [E_\beta, [E_{-\alpha}, E_\alpha]] = 0$

これに (7-14) を適用すると次の関係式が得られる。

$N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,\alpha+\beta} + N_{\beta,-\alpha} N_{\alpha,\beta-\alpha} + \sum_a \alpha_a\beta_a = 0$　　(8-3)

これに (8-1) と (8-2) を用いると、

$N_{-\alpha,\alpha+\beta} = - N_{\alpha,-\alpha-\beta}{}^* = N_{-\alpha-\beta,\alpha}{}^* = N_{\alpha,\beta}{}^*$　　(8-4)

$N_{\beta,-\alpha} = N_{-\alpha,\alpha-\beta} = - N_{\alpha,\beta-\alpha}$　　(8-5)

が得られる。これらを (8-3) へ代入すると

$|N_{\alpha,\beta-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\beta}|^2 = \sum_a \alpha_a\beta_a = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$　　(8-6)

が得られる。($\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ は実ベクトル page6)

(8-6) はルートに対する漸化式とみなすことができる。

$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ (7-13) の関係式は、1 つのルート $\boldsymbol{\beta}$ に対して $\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\beta}+n\boldsymbol{\alpha}$　$(n \geq 0)$ がまたルートになる可能性を示している。これは、$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\beta}-m\boldsymbol{\alpha}$　$(m \geq 0)$ についても同様である。($\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ がルートとならないときは $N_{\alpha,\beta}$ はゼロである。)

$\boldsymbol{\beta}-m\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}-(m-1)\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\beta}+n\boldsymbol{\alpha}$　$(m, n \geq 0)$　　(8-7)

ルートの数は限られているから、$\boldsymbol{\beta}-(m+1)\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}+(n+1)\boldsymbol{\alpha}$ はもはやルートでないとする。

このとき仮定により $\boldsymbol{\beta}+(n+1)\boldsymbol{\alpha}$ はルートではないので $N_{\alpha,\beta+n\alpha} = 0$ ($[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ (7-13) から $N_{\alpha,\beta+n\alpha}$ が $E_{\beta+(n+1)\alpha}$ の係数であることに注意)。

そこで、(8-6) で $\boldsymbol{\beta}$ の代わりに $\boldsymbol{\beta}+n\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}+(n-1)\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}+(n-2)\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\beta}+(k+2)\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}+(k+1)\boldsymbol{\alpha}$ を代入すると

$|N_{\alpha,\beta+(n-1)\alpha}|^2 = \sum_a \alpha_a (\beta_a + n\alpha_a)$

$|N_{\alpha,\beta+(n-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\beta+(n-1)\alpha}|^2 = \sum_a \alpha_a [\beta_a + (n-1)\alpha_a]$

$|N_{\alpha,\beta+(n-3)\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\beta+(n-2)\alpha}|^2 = \sum_a \alpha_a [\beta_a + (n-2)\alpha_a]$

. . .

$|N_{\alpha,\beta+k\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\beta+(k+1)\alpha}|^2 = \sum_a \alpha_a [\beta_a + (k+1)\alpha_a]$

これらを足し合わせると

$|N_{\alpha,\beta+k\alpha}|^2 = (n-k) \sum_a [\alpha_a\beta_a + \frac{1}{2}(n+k+1)\alpha_a\alpha_a] = (n-k)[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{2}(n+k+1)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})]$　　(8-8)

が得られる。　　注釈 8-1

次に、ルートの下端を考える。$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ (7-13) で $\boldsymbol{\alpha} \to -\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta} \to \boldsymbol{\beta} - m\boldsymbol{\alpha}$ とおくと、

$[E_{-\alpha}, E_{\beta-m\alpha}] = N_{-\alpha,\beta-m\alpha} E_{\beta-(m+1)\alpha}$

仮定により $E_{\beta-(m+1)\alpha}$ は存在しないので $N_{-\alpha,\beta-m\alpha} = 0$ でなければならない。従って、(8-4) より

$0 = N_{-\alpha,\beta-m\alpha} = N_{-\alpha,\alpha+[\beta-(m+1)\alpha]} = N_{\alpha,\beta-(m+1)\alpha}{}^*$

これに (8-8) で $k = -m-1$ とおいた式を代入すると

$$\sum_a \alpha_a\beta_a + \frac{1}{2}(n-m)\sum_a \alpha_a\alpha_a = 0$$

$$\therefore\ 2\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})} = m - n \qquad (8\text{-}9)$$

が得られる。これを (8-8) に代入すると

$$|N_{\alpha,\beta+k\alpha}|^2 = \frac{1}{2}(n-k)(m+k+1)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}) \qquad (8\text{-}10)$$

となり、$|N_{\alpha,\beta}|$ もまたルート $\boldsymbol{\alpha}$ によって完全に決まることが分かる。

このように、リー代数の構造はカルタン部分代数の随伴表現 $\{ad(H_a), a=1, 2, \cdots, r\}$ の固有値 α_a を成分とするルート $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ によって完全に決まることがわかった。ルートは r 次元ベクトル空間を張り、その計量はカルタン計量 (7-8) によって与えられる。この空間をルート空間という。

【ルート図】

(8-9) で $m - n := o_1$ とおくと

$$2\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})} = o_1 \qquad (8\text{-}11)$$

対称性から、この式で α と β の役割を入れ替えた式もまた整数値をとるはずである。

$$2\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})} = o_2 \qquad (8\text{-}12)$$

両者の積と比からそれぞれ

$$\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})^2}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})} = \cos^2\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}o_1 o_2 \qquad \theta_{\alpha\beta}\ \text{は}\ \boldsymbol{\alpha}\ \text{と}\ \boldsymbol{\beta}\ \text{のなす角度} \qquad (8\text{-}13)$$

$$\frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})} = \frac{o_1}{o_2} \qquad (8\text{-}14)$$

が得られる。

(8-13) より $\theta_{\alpha\beta}$ のとりうる値は次の場合に限定されることがわかる ($0 \le \theta_{\alpha\beta} \le \pi$ とする。o_1, o_2 は整数値であることに注意)。

$\cos^2\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}o_1 o_2$	$\theta_{\alpha\beta}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{\beta}\rvert}{\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert}$	対応する コンパクト単純リー群
0	$\frac{\pi}{2}$	–	
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	1	**SU**(3)
$\frac{2}{4}$	$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$	**SO**(5)
$\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\mathbf{G}_2$
$\frac{4}{4}$	$0, \pi$	–	

（表 8-1）

ルート・ベクトルは図に画いて表わされる。これをルート図とよぶ。（図 8-3 等参照）

$2\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})} = m - n$ (8-9) において、m , n は $m - n \le m$, $n - m \le n$ を満たすから、(8-7) と照らして、

$$\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta} - 2\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha} \qquad (8\text{-}15)$$

は確実にルートの一つである。この幾何学的な意味は、$\boldsymbol{\alpha}$ に垂直な面に対して、$\boldsymbol{\beta}$ を鏡映反転したものもルートであることになる。この鏡映をワイル鏡映（Wyle reflection）と呼ぶ（図 8-1）。すなわち、ルートは互いにワイル鏡映によってルートになる。これを「ルートはワイル鏡映に対して群を構成する」という。

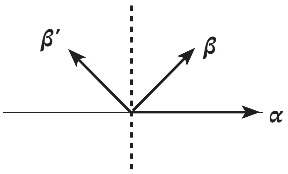


図 8-1

点線部分に紙面に垂直に鏡面が立っている感じ

SO(3) または **SU**(2) の場合、ルート空間は 1 次元でそのルートの大きさを α = 1 にとれば、$\boldsymbol{\alpha}$ 自身に対するワイル鏡映は $-\boldsymbol{\alpha}$ になる（図 8-2）。　注釈 8-2

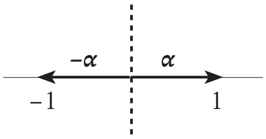


図 8-2

図 8-3 にランク 2 の場合（2 次元）のルート図を示す。一般にルート図に現れるルートは r 次元ベクトルで、その個数は d−r 個である。

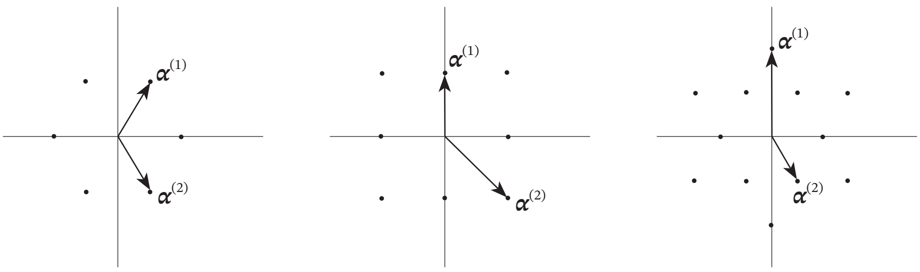


図 8-3

SU(3)　**SO**(5)　$\mathbf{G}_2$

【単純ルート】

ルート空間では (d−r) 個のルートが r 次元のベクトル空間を構成している。

各ルート $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ の最初のゼロでない成分が正（負）のとき、これを正（負）ルートという。d−r 個のルートのうち半分は正、半分は負である。

次に、2 つのルート $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ が与えられたとき、$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ の最初のゼロでない成分が正のとき、$\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$ と定義する（ルート間に大小関係を導入する）。

正ルートの中で、それ自身が他の正ルートに正の係数を掛けた 1 次結合では表わされないもの * ＝ 1 次独立なルートを単純ルート（simple root）という。　下の 2) 参照

* これは線形独立なルートベクトルを選ぶのに似てはいるが、もう少し厳しい条件である。単に線形独立なルートベクトルを選ぶだけなら幾つかの選び方があるが、このような決まりを採用してやると、線形独立なルートの選び方の中の一つが定まることになる。

ルートは r 次元ベクトルであるから、独立な単純ルートを r 個選ぶことができる。それらを $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \boldsymbol{\alpha}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}^{(r)}$ として、上に定義した大小関係を用いて $0 < \boldsymbol{\alpha}^{(1)} < \boldsymbol{\alpha}^{(2)} < \cdots < \boldsymbol{\alpha}^{(r)}$ の順にならべ、r 次元ルート空間の基底にとることにする。一般の正（負）ルートは、単純ルートに0または正（負）整数の係数を掛けたベクトルの線形結合で表すことができる。

このように、コンパクト単純リー代数の構造は単純ルートによって一意的に決まる。

単純ルートには、次のような性質がある。

① $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が単純ルートのとき、$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}$ はルートでありえない。

$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$ として、$\boldsymbol{\gamma}$ が正ルートなら $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma}$ となって $\boldsymbol{\beta}$ が単純ルートであることに反する。

もし $\boldsymbol{\gamma}$ が負ならば、$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + (-\boldsymbol{\gamma})$ となる。$(-\boldsymbol{\gamma})$ は正ルートだから $\boldsymbol{\alpha}$ が単純ルートであることに反する。

② $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) \leq 0$

$\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}$ がルートでないためには、(8-7) において m = 0 でなければならない。すなわち $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が単純ルートなら、(8-9) より $2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})}{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha})} = -\mathrm{n} \leq 0$　　(8-16)

$\therefore (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) \leq 0$ となる。

この結果、単純ルートについて次の 2 つの重要な結論が得られる。

1) 単純ルートの相対角度 $\theta_{\alpha\beta}$ は、

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_{\alpha\beta} \leq \pi \quad (0 \leq \theta_{\alpha\beta} \leq \pi \text{ としているので}) \qquad (8\text{-}17)$$

に限られる。$n = 0$ の場合、$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ は直交する。

2) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が単純ルートのときは、$m = 0$ で (8-7) の負側はなくなり、正側の $\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\alpha},\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta} + n\boldsymbol{\alpha}$ がルートである。

r 個の単純ルート $0 < \boldsymbol{\alpha}^{(1)} < \boldsymbol{\alpha}^{(2)} < \cdots < \boldsymbol{\alpha}^{(r)}$ が定まると、他の正ルートは次のようにしてすべて求められる。

まず、一般の正ルートは、$k_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$ を 0 または正整数の適当な組として

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1 \boldsymbol{\alpha}^{(1)} + k_2 \boldsymbol{\alpha}^{(2)} + \cdots + k_r \boldsymbol{\alpha}^{(r)}$$

で与えられる。

そこで、$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ として次の手順で正ルートを順次求めていく。

$k = 1$ の場合

$k_1, k_2, \cdots, k_r$ のいずれか一つが 1 で他は 0 であるから、このときの $\boldsymbol{\alpha}$ はすべて正ルートである。

$k = 2$ の場合

このとき (8-16) によって、$2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(j)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = -n^{(ij)} \neq 0$ なら $\boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \boldsymbol{\alpha}^{(j)}$ は正ルートである。

実際には、$\boldsymbol{\alpha}^{(j)} + p\,\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\ (p = 0, 1, \cdots, n^{(ij)})$ はすべて正ルートである。　上の 2) 参照

$k = 3$ の場合

$k = 2$ のとき、$\boldsymbol{\beta}^{(ij)} = \boldsymbol{\alpha}^{(i)} + \boldsymbol{\alpha}^{(j)}$ は正ルートであったから、$2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\beta}^{(ij)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)})} = m' - n' \equiv -l$ である。

しかし、l の値はわかっても $m' \neq 0$ の可能性が残る。しかし、この場合は、$\boldsymbol{\beta}^{(ij)} - \boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ が $k = 1$ の場合に求めた正ルートに含まれている。したがって、これを除外し新しいルートだけ拾えばよい。

$k = 4$ の場合

同様にして、$k = 3$ にもとめた正ルートに対し $2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\beta}^{(ij)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(k)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(k)})} = m' - n' \equiv -l$ に対応する式を調べる。$m' \neq 0$ に対応するルートは $k \leq 3$ において求めた正ルートに含まれているかどうかで m' の値が定まるから、これから n' を定めることができる。

この手続きをくり返し、$(d-r)/2$ 個の正ルートを求める。それらの符号を逆転した負ルートを加えて $(d-r)$ 個の全ルートが求まる。

9　ディンキン図

ここでは、単純ルートの構造をわかりやすく表現するのに便利なディンキン図（Dynkin diagram）をとりあげることにする。それぞれのディンキン図には 1 つの単純リー代数が対応することになる。

ディンキン図とは、まず、単純ルートを○印で表し、次に 2 つの単純ルートを相対角度を 2 つの○印を結ぶ線の数で表わしたものである。

単純ルートの相対角度は、(8-17) の範囲で、(表 8-1) に表わされたもののみが許される。$\frac{2\pi}{3}$ を 1 本線、$\frac{3\pi}{4}$ を 2 本線、$\frac{5\pi}{6}$ を 3 本線で表す。$\frac{\pi}{2}$ の場合は、2 つのルートは直交し、その間には線は引かないとする。π のときは 2 つのルートは独立でないから一方を除外してよい。

このようにすると、ランクが 2 のリー代数で可能なディンキン図は次の図 9-1 に限られる。ルート間に引いた線上の不等号は、ルート・ベクトルの長さの大小関係（表 8-1 参照）を表わす。

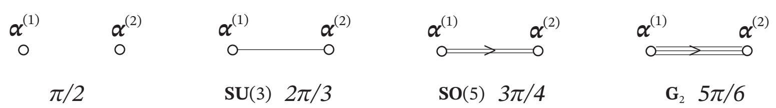


図 9-1　r = 2 のディンキン図

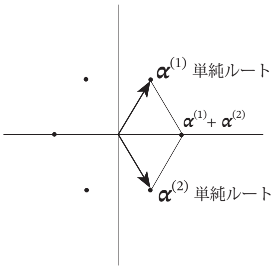
カルタンはこれら単純ルート $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ の大きさと相対角関係を

$$C_{ij} = 2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(j)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(j)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(j)})} \qquad (9\text{-}1)$$

で表した。C_{ij} を $r \times r$ 行列の (i, j) 要素とみなして、これをカルタン行列と呼ぶ。
この行列の対角要素は常に 2 である。また非対角成分は、0, −1, −2, −3 しかとれない。(8-16) 参照
ランク 2 の単純リー代数のカルタン行列は次のようになる。

$$\mathbf{SU}(3)\ :\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{SO}(5)\ :\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{G}_2\ :\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SU(3) の 2 つの単純ルートと他のルート



y 軸の右側のルートは正、左側のルートは負である。
正のルートは昇演算子、負のルートは降演算子に対応している。

一般にランク r のコンパクト単純リー代数の単純ルート系には r 個の○印をつないだ図形が 1:1 に対応する。従って、コンパクト単純リー代数の分類はあらゆる可能なディンキン図を書き下すことに帰着する。この分類については別章で改めて議論する。

コンパクト単純リー代数の分類

クラス	ランク r	リー代数の次元 d	コンパクト群
A_r	1, 2, 3, · · ·	$(r + 1)^2 - 1$	**SU**(r + 1)
B_r	1, 2, 3, · · ·	r(2r + 1)	**SO**(2r + 1)
C_r	1, 2, 3, · · ·	r(2r + 1)	**Sp**(2r, **R**)
D_r	3, 4, 5, · · ·	r(2r − 1)	**SO**(2r)
E_r	6, 7, 8	78, 133, 248	$\mathbf{E_r}$
F_4	4	52	$\mathbf{F_4}$
G_2	2	14	$\mathbf{G_2}$

補足
群が単純群であるとは、いかなる不変部分群も含まないことであった。半単純群はいくつかの単純群の直積に分解できる。これをリー代数でいえば、半単純群に含まれる異なる 2 つの単純群のリー代数は可換である。（定理 4-1 の証明参照 page3）その結果、それぞれの群に対応する任意のルート・ベクトルを $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ とすると、これらは直交し $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$ となる。ディンキン図から互いに直交するルートを除外したのは、単純群を考えているからである。もっとも、単純群のルート・ベクトルの中に直交するルートが含まれないわけではない。いくつかのルートが互いに直交する 2 組（あるいはそれ以上）のルートに分割できたら、それは単純群ではないと言っているのである。

１０　ウエイトと既約表現

これまでは随伴表現を軸にルート空間を議論してきたが、ここでは一般の既約表現に枠をひろげてウエイトという概念を導入していく。
コンパクトな連結リー群の表現 D(g) はリー代数の表現 $\rho(X_i)$ を用いて

$$D(g) = \exp\left(i \sum_{i=1}^{d} t^i \rho(X_i)\right) \qquad (10\text{-}1)$$

と与えられるので（page4(5-2)）、この場合は群の表現を知るにはリー代数の表現を知ればよい。更に、コンパクト群の表現は適当な内積に対してユニタリ表現となり、このとき $\rho(X_i)$ はエルミート行列となる。
リー代数をカルタン標準形で書くと、その表現は

$\rho(H_a)$, $\rho(E_\alpha)$, $\rho(E_{-\alpha}) = \rho^\dagger(E_\alpha)$

となる。

ここで一般の単純リー代数が作用する状態ベクトルを $|\mu, D>$ 等で表わすとしよう。D は既約表現の種類を指定する記号であり、既約表現はその次元で区別できるので、これを太字で書いた次元 **D** で、たとえば 2 次元表現は **2** と書くことにする。

表現空間の基底をカルタン部分代数 H_a の固有ベクトルに取れば、可換な行列 H_a $(a = 1, \cdots, r)$ の同時固有ベクトルを $|\mu, D>^i$ $(i = 1, \cdots, D)$ と書くと

$$H_a|\mu, D> = \mu_a|\mu, D> \quad (a = 1, \cdots, r) \qquad (10\text{-}2)$$

となる。

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r)$ はウエイト（weight）と呼ばれる。

またこの r 次元空間のことをウエイト空間と呼ぶ。同じウエイトの固有ベクトルが複数存在する場合、その数のことを重複度と呼ぶ。

随伴表現の場合はウエイト $\boldsymbol{\mu}$ がルート $\boldsymbol{\alpha}$ に一致する（ルートは随伴表現の場合のウエイトである）。

表現 V が $\mathfrak{g}$ の随伴表現であるとき、そのウェイトはルートと呼ばれ、ウェイト空間はルート空間と呼ばれ、ウェイトベクトルはルートベクトルと呼ばれる。『ウィキペディア（Wikipedia）』

ルートの場合と類似の議論がウエイトの場合にも成立することになる。

$|\mu, D>^i =: u^i_\mu$ $(i = 1, \cdots, D)$ と書くと、内積は次のように定義される。

$$<\mu, D|\nu, D> = (u_\mu{}^*)^i (u_\nu)^i$$

これまでと同様に 2 回現れる添え字 i については i = 1, 2, · · · , d について和をとるものとする。

H_a はエルミート行列なので

$$\begin{aligned}<\mu, D|H_a|\nu, D> &= (u_\mu{}^*)^i (H_a)^{ij} (u_\nu)^j \\ &= \nu_a<\mu, D|\nu, D> \\ &= \mu_a<\mu, D|\nu, D>\end{aligned}$$

となる。従って、固有値が異なる固有ベクトルは直交する。

固有ベクトルを規格化して

$$<\mu, D|\nu, D> = \delta_{\mu_1\nu_1}\cdots\delta_{\mu_r\nu_r} \qquad (10\text{-}3)$$

とする。

固有ベクトル $|\mu, D>$ に E_α を作用させた状態 $E_\alpha|\mu, D>$ の H_a の固有値は

$$\begin{aligned}H_a E_\alpha|\mu, D> &= ([H_a, E_\alpha] + E_\alpha H_a)|\mu, D> \qquad \leftarrow\ [H_a, E_\alpha] = \alpha_a E_\alpha\ (7\text{-}14) \quad H_a|\mu, D> = \mu_a|\mu, D>\ (10\text{-}2) \\ &= (\mu_a + \alpha_a)E_\alpha|\mu, D>\end{aligned}$$

から $\mu_a + \alpha_a$ であることが分かる。

したがって、

$$E_\alpha|\mu, D> = N_{\alpha,\mu}|\mu + \alpha, D> \qquad (10\text{-}4)$$

と書ける。

ここで、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\mu}) = \alpha^a\mu_a &= <\mu, D|\alpha^a H_a|\mu, D> \qquad \leftarrow\ <\mu, D|\mu, D> = 1\ (10\text{-}3) \quad H_a|\mu, D> = \mu_a|\mu, D>\ (10\text{-}2) \\ &= <\mu, D|[E_\alpha, E_{-\alpha}]|\mu, D> \qquad \leftarrow\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha_a H_a\ (7\text{-}14) \\ &= <\mu, D|E_\alpha E_{-\alpha}|\mu, D> - <\mu, D|E_{-\alpha}E_\alpha|\mu, D> \\ &= |N_{-\alpha,\mu}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 \qquad (10\text{-}5')\end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned}N_{-\alpha,\mu} &= <\mu - \alpha, D|E_{-\alpha}|\mu, D> \qquad \leftarrow\ E_\alpha{}^\dagger = E_{-\alpha}\ (7\text{-}14) \\ &= <\mu - \alpha, D|E_\alpha{}^\dagger|\mu, D> \\ &= <\mu, D|E_\alpha|\mu - \alpha, D>^*\end{aligned}$$

$= N_{\alpha,\mu-\alpha}{}^*$ 　(10-5″)

これらから、漸化式

$|N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 = |N_{\alpha,\mu}|^2 + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\mu})$ 　(10-5)

を得る。

ルートの場合と同様に、$|\mu, D>$ に E_α あるいは $E_{-\alpha}$ を繰り返し作用させることによってウエイトのシリーズ

$\boldsymbol{\mu} - m\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\mu} - (m-1)\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}, \cdots, \boldsymbol{\mu} + n\boldsymbol{\alpha} \quad (m, n \geq 0)$ 　(10-6)

が得られる。従って 8 節と同じ方法によって

$2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})} = m - n$ 　(10-7)

$|N_{\alpha,\mu+k\alpha}|^2 = \dfrac{1}{2}(n-k)(m+k+1)(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})$ 　(10-8)

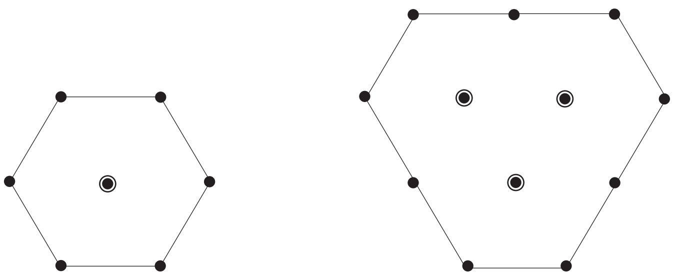
が得られる。また、同様に、$\boldsymbol{\mu}$ がウエイトであるとすると

$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} - 2\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}$ 　(10-9)

もウエイトである。（ワイル鏡映 (8-15)page10 参照）

ルート図と同様にウエイトの作る r 次元空間の図形をウエイト図 (weight diagram) という。

(10-9) から $(\boldsymbol{\mu}'\cdot\boldsymbol{\mu}') = (\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu})$ が言えるので、ウエイトはワイル鏡映によってその長さを変えない。従って、ウエイトの作る格子は同心球面状に位置している。（ウエイト図もルートに対するワイル鏡映に対して群をつくる。）例として図 10-1 に **SU**(3) の 8 次元表現、15 次元表現のウエイト図を示す。図で 2 重丸はウエイトが 2 重に縮退していることを示している。



SU(3) の D= 8 次元表現　　**SU**(3) の D= 15 次元表現

図 10-1

ウエイトの正負や大小もルート同様に定義できる。すなわち、ウエイト $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r)$ の最初のゼロでない成分の正負によってウエイトの正負と定義する。また、2 つのウエイトの差 $\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\nu}$ の最初のゼロでない成分が正の時 $\boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\nu}$ と定義する。最初のゼロでない成分が等しいときは、その次のゼロでない成分を比較して大小を決定する。この関係のもとで、最も大きなウエイトを最高ウエイト (highest weight) という。

最高ウエイトをもつ状態は各既約表現 D に対して一意的に定まる。（最高ウエイトには縮退はなく、対応する固有ベクトルは一意に決まる。）

このことを示すには、既約表現 D の最高ウエイト $\boldsymbol{\mu}$ に対応する固有ベクトルを $|\mu, D>$ とし , 任意のルート $\boldsymbol{\alpha}_i$ に対して $E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \cdots E_{\alpha_k} |\mu, D>$ の形のベクトルを考える（(10-4) 参照)。すべての k に対してのベクトルの集合 $\{E_{\alpha_1} E_{\alpha_2} \cdots E_{\alpha_k} |\mu, D>\}$ は既約表現全体を張る。もし、最高ウエイトに対応する別の固有ベクトル $|\mu, D>'$ が存在すると仮定すると c を比例定数として

$|\mu, D>' = c\, E_{\beta_1} E_{\beta_2} \cdots E_{\beta_l} |\mu, D>$

と書けるはずである。ただし、2つの状態は同じウエイトをもつから $\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + \boldsymbol{\beta}_l = 0$ でなければならない。ここで $\boldsymbol{\beta}_i$ のうち正のルートを交換関係を使って右に移動させていく。例えば $\boldsymbol{\gamma}$ が右から数えて最初の正のルートであるとすると、この E_γ を交換関係を使って、変形させながら次々と右に移動させていく（注釈 10-1)。最後に $\cdots E_{\text{正ルート}} |\mu, D>$ という形になり $|\mu, D>$ に直接作用するとゼロになる（最高ウエイトなので)。従って、正のルートはすべて除外できて、負のルートが残る。ところが、$\boldsymbol{\beta}_i$ の総和はゼロなので結局それらはすべてゼロとなり、最高ウエイトは一意に定まる。

このことから、最高ウエイトは既約表現を一意に決める重要なパラメータとなる。（最高ウエイトを指定することによって既約表現が 1 つ、そしてただ 1 つ定まることが結論できる。）

既約表現の任意の固有ベクトルは最高ウエイトの固有ベクトル $|\mu, D>$ に負のルートをもつ演算子 $E_{-\alpha}$ を作用させていくことによって得られる（最高ウエイトから単純ルートを引いていくことによって得られる）。
ただし、一般に $E_{-\alpha}$ と $E_{-\beta}$ は非可換であるから、それを作用させる順序をかえて作用させると、結果は同じウエイトをもつが互いに独立な状態になる場合がある。すなわち、同一の既約表現 D の中に、最高ウエイト以外に対応する状態は一般に縮退している。

ウエイト $\boldsymbol{\mu}$ が最高ウエイトであるための必要十分条件は、すべての単純ルート $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ に対して $\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ がウエイトにならないことである。(10-7) によると、この場合 $n = 0$ でなければならず、各 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ に対して、

$$2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\mu})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = m^{(i)} \qquad (10\text{-}10)$$

となる。$m^{(i)}$ は 0 か正の整数である。
単純ルートは 1 次独立で、最高ウエイトには縮退はないから、結局、最高ウエイト $\boldsymbol{\mu}$ をもつ既約表現 D は、r 個の 0 か正の整数の組

$$[\, m^{(1)}, m^{(2)}, \cdots, m^{(r)} \,] \qquad (10\text{-}11)$$

によって完全に指定される。この数の組はディンキン・インデックス（Dinkin index）またはディンキン指数と呼ばれ、$\boldsymbol{\mu}$ が最高ウエイトでないときは、負の整数も含む整数となる。

(10-11) において、j 番目のインデックス $m^{(j)}$ が 1 で、他はすべて 0 になるような最高ウエイトを $\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ としよう。$\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ は各 i に対して、

$$2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\omega}^{(j)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = \delta^{ij} \qquad (10\text{-}12)$$

（補論 10-1　page20 参照）

を満たさなければならず、また逆に $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ がわかっていれば、この式から $\boldsymbol{\omega}^{(j)}$ が定まる。
一般のディンキン・インデックスに対応する任意のウエイトは、$m^{(i)}$ の組に対して

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{r} m^{(i)}\,\boldsymbol{\omega}^{(i)} \qquad (10\text{-}13)$$

で与えられる。
$\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ を基本ウエイト（fundamental weight）という。
また、この $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ を最高ウエイトとしてもつ r 個の表現 ρ_i を、基本表現（fundamental representation）と呼ぶ。

直積表現（基本表現と直積表現）

１つのリー代数の表現 $\rho^{(a)}(\hat{X})$ と他の表現 $\rho^{(b)}(\hat{X})$ を考える。
群の直積表現は、　（Ⅱ章「有限群の表現」　page13）

$$[D^{(a\times b)}(g)]_{kl,\,ij} \equiv D^{(a)}{}_{ki}(g)\, D^{(b)}{}_{lj}(g) \qquad (10\text{-}14)$$

なので、これに (10-1) を代入して t^i を無限小だとみなして展開すると、
リー代数の直積表現

$$\{\rho^{(a\times b)}(\hat{X})\}_{ik,\,jl} = \{\rho^{(a)}(\hat{X})\}_{ij}\,\delta_{kl} + \delta_{ij}\,\{\rho^{(b)}(\hat{X})\}_{kl} \qquad (10\text{-}15)$$

が得られる。

直積表現の表現空間は、それぞれの表現空間の直積である。それぞれの表現空間を張る状態ベクトルを $|\mu^{(a)}, N>$、$|\mu^{(b)}, M>$ とすると、２つのベクトル空間の直積空間を基底ベクトル

$$|\mu^{(a)}, N>|\mu^{(b)}, M>$$

で定義したとき、リー代数の抽象演算子 $\hat{X}$ の作用の仕方は、次のようになる。

$$\hat{X}\,|\mu^{(a)}, N>|\mu^{(b)}, M> = (\hat{X}\,|\mu^{(a)}, N>)\,|\mu^{(b)}, M> + |\mu^{(a)}, N>(\hat{X}\,|\mu^{(b)}, M>)$$

$\rho^{(a)}(H_c)$、$\rho^{(b)}(H_c)$ の固有ベクトルをそれぞれ $|\mu^{(a)}, N>$、$|\mu^{(b)}, M>$ とすると、$\rho^{(a\times b)}(H_c)$ の固有ベクトルは

$$|\mu^{(a)}, N>|\mu^{(b)}, M>$$

となるから、(10-15) より

$\rho^{(a\times b)}(H_c)\,|\,\mu^{(a)}, N>|\,\mu^{(b)}, M>$

$= (\rho^{(a)}(H_c)\,|\,\mu^{(a)}, N>)\,|\,\mu^{(b)}, M> + \,|\,\mu^{(a)}, N>(\rho^{(b)}(H_c)\,|\,\mu^{(b)}, M>)$

$= [\mu^{(a)} + \mu^{(b)}]_c\,|\,\mu^{(a)}, N>|\,\mu^{(b)}, M>$　　(10-16)

が得られる。

これは、直積表現の中に、ウエイト $\boldsymbol{\mu}^{(a)} + \boldsymbol{\mu}^{(b)}$ をもつ表現が含まれていることを示している＝直積表現のウエイトはそれぞれの表現のウエイトの和である。したがって、基本表現 $\rho^{(i)}(\hat{X})$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ が求まっていると、それらの直積表現を順次構成することによって、高次の最高ウエイト (10-13) : $[\, m^{(1)}, m^{(2)}, \cdots, m^{(r)}\,]$ をもつ状態ベクトルをつくることができる。（最高ウエイトが $\boldsymbol{\mu} : [\, m^{(1)}, m^{(2)}, \cdots, m^{(r)}\,]$ で与えられる表現は (10-13) より $m^{(1)}$ 個の基本表現 ρ_1、$m^{(2)}$ 個の基本表現 ρ_2、・・・、$m^{(r)}$ 個の基本表現 ρ_r の直積表現によって与えられる。）

最高ウエイトからその他のウエイトを求めていく

最高ウエイト状態が求まると、それに単純ルート $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ に対する $E_{-\alpha^{(i)}}$ を順次作用させて既約表現をつくることが可能である＝既約表現のその他のウエイトは、最高ウエイトから単純ルートを順次引いていくことによって得られる。

$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} - \sum_{j=1}^{r} k_j \boldsymbol{\alpha}^{(j)}$　（k_j は 0 か正の整数 ）　　(10-17)

この時、(10-10) とカルタン行列 (9-1) の定義より

(10-7) $$2\,\frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\mu}')}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = 2\,\frac{\left(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot(\boldsymbol{\mu} - \sum_{j=1}^{r} k_j \boldsymbol{\alpha}^{(j)})\right)}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = m^{(i)} - \sum_{j=1}^{r} k_j C_{ji} \equiv p^{(i)} \qquad (10\text{-}18)$$

であるから、一般のウエイトは最高ウエイトのディンキン・インデックス $[\, m^{(1)}, m^{(2)}, \cdots, m^{(r)}\,]$ からカルタン行列の行の成分 $(C_{j1}, C_{j2}, \cdots, C_{jr})$ を順次引いていくことによって得られる。単純ルートは 1 次独立だから、(10-17) によりウエイトは $[p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(r)}]$ によって表される。$\sum_{j=1}^{r} k_j$ をウエイトのレベルという。(10-9) から、最高ウエイトから出発して $\boldsymbol{\mu}'$ の $p^{(i)}$ が正の時は $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ を引いていくことができる。こうして、各レベルのウエイトを求めることができる。

Ⅵ章「具体例 **SU(3)**」page5, 6 の図を参考にすると分かりやすい。

補論 1-1　　page1

https://research.kek.jp/people/hkodama/Math/LieGroup.pdf　p5

【定理 Lie 群の連結 Lie 部分群と Lie 環の部分環の対応】

Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とする。このとき、$\mathfrak{g}$ の任意の部分代数 $\mathfrak{h}$ に対して、$\mathfrak{h}$ を G 上のベクトル場の包合系と見なし、単位元 e を含むその極大積分多様体を H とすると、H は G の連結 Lie 部分群となる。逆に，G の任意の連結 Lie 部分群 H に対して、その Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は (左不変ベクトル場の線形集合として）一意的に $\mathfrak{g}$ の部分代数と見なされる。$\mathfrak{g}$ の部分代数と G の Lie 部分群との対応は 1 対 1 で次の関係にある：

i) 連結 Lie 部分群 H に対応する部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Exp}(X) \subset H\}$$

ここで，$\mathrm{Exp}(X) = \{ \exp tX \mid t \in R\}$

ii) 部分 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ に対応する連結 Lie 部分群 H は

$$H = \{ \exp X \cdot \exp Y \cdots \exp Z \mid X, Y, \cdots , Z \in \mathfrak{h}\}$$

[From: 竹内勝・伊勢幹夫「リー群論」(岩波書店 , 1992)]

補論 3-1　　page2

不変部分代数 $\mathfrak{h}$ が可換（アーベリアン）の時は、

$$[X_i, X_j] = i\, C^A{}_{ij}\, X_A = 0 \quad \rightarrow \quad C^A{}_{ij} = 0$$

$$[X_i, X_\alpha] = i\, C^j{}_{i\alpha}\, X_j \in \mathfrak{h} \qquad C^\beta{}_{i\alpha} = 0$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = i\, C^A{}_{\alpha\beta}\, X_A$$

これにより、

$\det(g_{AB}) = 0$ となる。

$g_{AB} = C^D{}_{AE}\, C^E{}_{BD}$ を分けて書くと、

$$= C^j{}_{Ai}\, C^i{}_{Bj} + C^\gamma{}_{Ai}\, C^i{}_{B\gamma} + C^j{}_{A\gamma}\, C^\gamma{}_{Bj} + C^\delta{}_{A\gamma}\, C^\gamma{}_{B\delta}$$

これより、

$$g_{kl} = C^j{}_{ki}\, C^i{}_{lj} + C^\gamma{}_{ki}\, C^i{}_{l\gamma} + C^j{}_{k\gamma}\, C^\gamma{}_{lj} + C^\delta{}_{k\gamma}\, C^\gamma{}_{l\delta} = 0$$

$$g_{\alpha k} = C^j{}_{\alpha i}\, C^i{}_{kj} + C^\gamma{}_{\alpha i}\, C^i{}_{k\gamma} + C^j{}_{\alpha\gamma}\, C^\gamma{}_{kj} + C^\delta{}_{\alpha\gamma}\, C^\gamma{}_{k\delta} = 0$$

$$g_{\alpha\beta} = C^j{}_{\alpha i}\, C^i{}_{\beta j} + C^\gamma{}_{\alpha i}\, C^i{}_{\beta\gamma} + C^j{}_{\alpha\gamma}\, C^\gamma{}_{\beta j} + C^\delta{}_{\alpha\gamma}\, C^\gamma{}_{\beta\delta} = C^j{}_{\alpha i}\, C^i{}_{\beta j} + C^\delta{}_{\alpha\gamma}\, C^\gamma{}_{\beta\delta}$$

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ij} = 0 & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$\det(g_{AB}) = \det(g_{ij}) \cdot \det(g_{\alpha\beta}) = 0$$

補論 7-1　　page6

http://www.f-denshi.com/000TokiwaJPN/05unitr/080unt.html

	複素数		実数	
	名称	性質	名称	性質
正規行列 $TT^\dagger = T^\dagger T$	ユニタリ行列 U	$U^\dagger = U^{-1}$	直交行列 R	$R^t = R^{-1}$
	エルミート行列 H	$H^\dagger = H$	対称行列 S	$S^t = S$
	歪エルミート行列 A	$A^\dagger = -A$	交代行列 A	$A^t = -A$

https://ja.wikipedia.org/wiki/ 交代行列

交代行列（スペクトル論 正方行列の固有ベクトル、固有値に関する理論の無限次元への拡張）

交代行列の固有値は常に ±λ のような対として得られる（奇数次の場合に、0 を固有値に加えて考えることもあるが、ここでは除いている)。実交代行列の非零固有値はすべて純虚数であり、それらを $\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2, \ldots$（各 λ_k は実数）の形に書くことができる。

実交代行列は正規行列（つまり、自身の随伴と可換）であり、それゆえスペクトル論の対象として任意の実交

代行列がユニタリ行列によって対角化可能であることを述べることができる。実交代行列の固有値は複素数となるから実行列によって対角化することはできないが、それでも適当な直交変換によって区分対角化することができる。特に、任意の 2n- 次交代行列は直交行列 Q と行列

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \lambda_r \\ & & & & & -\lambda_r & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

（ただし、λ_k は実数）

を用いて $A = Q\Sigma Q^t$ の形に書くことができる。ここで直交行列とは $Q^t = Q^{-1}$ を満たす行列 Q のことである。行列 Σ の非零固有値は $\pm i\lambda_k$ である。奇数次の場合には、Σ は必ず少なくとも一つの行か列が全て 0 になる。

http://tau.doshisha.ac.jp/lectures/2006.linear-algebra-II/html.dir/node129.html

実交代行列 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ の定理

●実交代行列の固有値はすべて純虚数または 0 である。

●実交代行列において，異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

●(交代行列の対角化)

交代行列 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする。このとき、A は ユニタリー行列 $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ を用いて

$$D = U^{-1}AU = U^{\dagger}AU$$

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$　　diag は対角行列要素

$$U = [\mathbf{p}_1 \ \cdots \ \mathbf{p}_n]$$

と **C** 上で対角化される。ただし、$\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり、U がユニタリー行列となるように選ぶとする。

●(交代行列の実標準形)

交代行列 $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1^*, \lambda_3, \lambda_4 = \lambda_3^*, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = \lambda_{n-1}^*$ とする。（前項の https://ja.wikipedia.org/wiki/ 交代行列参照）

このとき、A は 直交行列 $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$ を用いて

$$D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$$

$$D = \begin{pmatrix} R(\lambda_1) & & & \\ & R(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(\lambda_{n-1}) \end{pmatrix} \qquad R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Im}(\lambda) \\ \mathrm{Im}(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = [\mathrm{Im}(\mathbf{q}_1)\ \mathrm{Re}(\mathbf{q}_1)\ \cdots\ \mathrm{Im}(\mathbf{q}_{n-1})\ \mathrm{Re}(\mathbf{q}_{n-1})]$$　　Im は虚部、Re は実部

と実標準形でブロック対角化される。ただし、$\mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の固有ベクトルであり、Q が直交行列となるように選ぶとする。

●例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

固有値は $\lambda = i, -i$　　← $\det|\lambda E - A| = \lambda^2 + 1 = 0$ より

固有ベクトルはそれぞれ、$c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

C 上での対角化　$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

R 上での実標準形　$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

補論 7-2　　page7

ブラとケットの外積　　https://hb3.seikyou.ne.jp/home/E-Yama/x-p.pdf

内積 $\langle a|b\rangle$ に対して外積を次のように定義する。

$|a\rangle\langle b|$

これに右からケット $|\gamma\rangle$ を作用させると、

$(|a\rangle\langle b|)|\gamma\rangle = |a\rangle(\langle b|\gamma\rangle) = (\langle b|\gamma\rangle)|a\rangle$

内積 $\langle b|\gamma\rangle$ はスカラーとなるから、ケット $|a\rangle$ の前にもってくることができて、この表式となる。外積演算子 $|a\rangle\langle b|$ はケット $|\gamma\rangle$ の方向をケット $|a\rangle$ の向きに変える働きをする。

内積は、$\langle a|b\rangle = \sum_i \langle a|i\rangle\langle i|b\rangle$ と書ける。

ここで i は基底ベクトルで、異なる基底ベクトルは互いに直交するから、$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

この式から $\langle a|$ をはずした式を考えてみると、

$|b\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|b\rangle$

この式はケット $|b\rangle$ を基底ケット $|i\rangle$ で展開した式である。($\langle i|b\rangle$ が $|i\rangle$ 要素の係数)

この式からさらに $|b\rangle$ を抜いた次の式を考えてみる。

$I = \sum_i |i\rangle\langle i|$

となる。ここで I は恒等演算子である。この最後の式は完全性 (完備性) と呼ばれる。

補論 10-1　　page16

「物理のためのリー群とリー代数」より、定理の証明は省略して掲載

定理　リー代数の 2 つの既約表現は、もし最高ウェイトが同じであるならば互いに等価である。

この定理は、既約表現を分類する上で、最高ウェイトが極めて重要な地位を占めることを示している。

ウェイトを議論する場合、ルートの基本系である単純ルート $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ を用いて

$$2\frac{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\omega}^{(j)})}{(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\alpha}^{(i)})} = \delta^{ij} \qquad ①$$

で定義される $\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{\omega}^{(r)}$ を、基底のベクトルとすると便利である。①は、次の定理により、$\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ について簡単に解くことができる。

定理

①で定義される $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ は、カルタン行列 A、あるいはその逆行列 A^{-1} とルートの基本系 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ を用いて

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}\,\boldsymbol{\omega}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(i)} = \sum_{k=1}^{r} (A^{-1})_{ik}\,\boldsymbol{\alpha}^{(k)} \qquad ②$$

と書くことができる。

ウェイトを議論する際に②のベクトルを使用するのは、ただ単に便利だからというだけに留まらない。次の定理が重要な意味を持つ。

定理

(1) ランク r の単純リー代数では、②で定義される $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ を最高ウェイトとする r 個の既約な基本表現が存在する。

(2) 任意の既約表現の最高ウェイト $\boldsymbol{\mu}$ は、②で定義される r 個のウェイトの、ゼロまたは正の整数を係数とする一次結合

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\,\boldsymbol{\omega}^{(i)} \qquad ③$$

で表される。ここで係数 λ_i はゼロまたは正の整数である。

この定理故に、①で定義される r 個のベクトルには基本的なウェイトとしての性格が付与されることになる。そこでこれらのウェイトのことを基本ウェイトと呼ぶことにする。リー代数の既約表現を分類することは、結局のと

ころ $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ という整数の組を指定することに帰着する。