Ⅳ　回転群

1、3 次元回転群 SO(3)

連続群の中でもっとも身近な例は 3 次元回転群 **SO**(3) である。

3 次元実ユークリッド空間 E^3 の回転は、3 次元の実ベクトルを実ベクトルに移す行列 R で、

$R^{-1} = R^t$（直交行列 $AA^t = A^tA = 1$、直交行列の行列式の値は ±1）および $\det R = 1$ を満たす行列の作る群を指す。

n 次直交行列全体の集合を n 次直交群といい、**O**(n) と書く。行列式の値が 1 となる直交行列全体の集合を特殊直交群といい、**SO**(n) と書く。

SO(3) によってベクトルの内積は一定に保たれる。

$(R\mathbf{u}, R\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, R^tR\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$　　$\leftarrow$ $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^t\mathbf{y})$　　(1-1)

定理　E^3 空間の任意の回転 R は、1 つの軸のまわりの回転で表せる。（これは、2 つ以上の回転を続けて行った $R = R_n \cdots\cdots R_2R_1$ の結果が、どれか特定の軸のまわりに特定の角度だけ回転する操作に等しいことを主張している。）

【証明】

$\det(R-1) = \det(R^t-1) = \det(R^{-1}-1) = \det R^{-1}\det(1-R) = \det(1-R) = -\det(R-1)$ *1

したがって、$\det(R-1) = 0$ 。

これは $(R-1)\mathbf{u} = 0$ を満たす 0 でないベクトル **u** が存在することを意味する。 *2

このとき、任意の実数 t に対して $R(t\mathbf{u}) = t\mathbf{u}$ であるから、軸 t**u** は R によって不動である。

*1　公式 $|A^t| = |A|$, $|AB| = |A||B|$, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 等を用いた。

*2　A の行列式が 0 $\Longleftrightarrow$ 同次連立一次方程式 $A\mathbf{x} = 0$ が $\mathbf{x} = 0$（自明解）以外の解 $(\mathbf{x} \neq 0)$ を持つ

次にこのような軸は 2 つとはないことを示す。

R が 2 つの独立なベクトル **u** と **v** を動かさない（$R\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $R\mathbf{v} = \mathbf{v}$）と仮定すると、**u** と **v** で張られる平面上の任意のベクトルは R で不動である。いまこの面に垂直な 0 でないベクトルを **w** とすれば、

$(R\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (R\mathbf{w}, R\mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{u}) = 0$　　$\leftarrow$ (1-1) より

したがって、$R\mathbf{w}$ は **u** や **v** に直交し、長さは **w** に等しい。すなわち、$R\mathbf{w} = \pm\mathbf{w}$ 。

$R\mathbf{w} = -\mathbf{w}$ なら $\det R = -1$ となるから、$R\mathbf{w} = \mathbf{w}$ でなければならない。　注釈 1-1

w は **u** にも **v** にも垂直であるから、R はすべてのベクトルを不動にすることになる。このような R は $R = 1$ となる。すなわち、$R \neq 1$ なら不動にする軸を 1 つしかもたない。

この結果、3 次元ベクトル空間の回転 R は、回転の軸を表わす単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ と、軸のまわりの回転角 ϕ で指定される。これを $R(\phi; \mathbf{n})$ と表わすことにする。ただし、**n** は $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ を満たすので、回転を表わす独立なパラメーターの数は 3 個である。

回転角 ϕ の変域は $0 \leqq \phi \leqq \pi$ としてすべての回転が得られるが、$\phi = \pi$ の場合は

$R(\pi; \mathbf{n}) = R(\pi; -\mathbf{n})$ である。

$(\phi, \mathbf{n})$ のかわりに 3 次元ベクトル $\boldsymbol{\phi} = \phi\mathbf{n}$ を用いてもよい。$\phi = \pi$ のときは、$\boldsymbol{\phi}$ と $-\boldsymbol{\phi}$ が同一の回転を表わす。いいかえれば、**SO**(3) のパラメーター空間は半径 π の 3 次元球体で表せるが、球面上の対極点は同一の回転を表わす。これは 3 次元の実射影空間と同じものである。パラメーター空間は有限な領域であるから **SO**(3) はコンパクト群である。しかしこのパラメーター空間は単連結空間ではない。

2、SO(3) の構造

3 次元の回転演算子 $\hat{R}(\boldsymbol{\phi})$ は、以下のように直交する 2 つの軸の回転を組み合わせて実現できる。

定理　3 次元ユークリッド空間の直交する 3 つのベクトルを $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とし、**e** を軸とする角 α の回転を $\hat{R}_\alpha(\mathbf{e})$ で表すとする。すると回転群 **SO**(3) の任意の元は、$\hat{R}(\mathbf{e}_i)$（ i = 1, 2, 3 ）のうち 2 種、たとえば $\hat{R}(\mathbf{e}_2)$ と $\hat{R}(\mathbf{e}_3)$ の組

み合わせで生成され、$\hat{R}_{\alpha\beta\gamma} = \hat{R}_\alpha(\mathbf{e}_3)\,\hat{R}_\beta(\mathbf{e}_2)\,\hat{R}_\gamma(\mathbf{e}_3)$ と表わされる。　(2-1)

ただしここに、$\hat{J}_i$ を $\mathbf{e}_i$ のまわりの回転生成演算子として $\hat{R}_\alpha(\mathbf{e}_i) = \exp(-i\,\alpha\,\hat{J}_i)$ （$i = 1, 2, 3$）とする。

【証明】

まず、$\mathbf{SO}(3)$ はベクトルの大きさを変えないことに注目する。

$\hat{R}$を任意の $\mathbf{SO}(3)$ の回転として、これを座標枠 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) に作用させる。

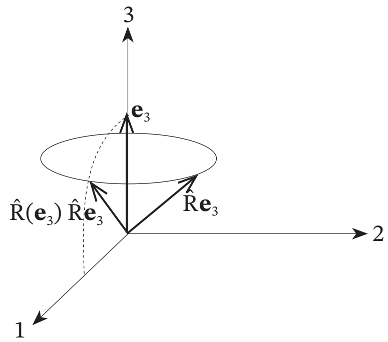
この結果、$\mathbf{e}_i$ （$i = 1, 2, 3$）は、$\hat{R}\mathbf{e}_i$ に移るが、まず $\hat{R}\mathbf{e}_3$ に着目してみる。これをもとの座標軸 $\mathbf{e}_3$ のまわりに回転 $\hat{R}(\mathbf{e}_3)$ をほどこして、$\hat{R}(\mathbf{e}_3)\,\hat{R}\mathbf{e}_3$ が $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ 平面に含まれるようにすることができる。

次にこのベクトルを $\mathbf{e}_2$ 軸のまわりの適当な角度の回転 $\hat{R}(\mathbf{e}_2)$ を作用させて、そのベクトルを $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ 面内に保ちながらもとの $\mathbf{e}_3$ に一致させることができる。

その結果は $\mathbf{e}_3 = \hat{R}(\mathbf{e}_2)\,\hat{R}(\mathbf{e}_3)\,\hat{R}\mathbf{e}_3$ であるが、回転して戻ってきた $\mathbf{e}'_1$ と $\mathbf{e}'_2$ は、まだもとの $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に一致していない。しかし、$\mathbf{e}'_1$ と $\mathbf{e}'_2$ は $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 面内にあるから、さらに $\hat{R}(\mathbf{e}_3)$ を作用させれば、$\hat{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ は完全にもとの座標枠 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) にもどる。

すなわち、$\hat{R}_{\gamma'}(\mathbf{e}_3)\,\hat{R}_{\beta'}(\mathbf{e}_2)\,\hat{R}_{\alpha'}(\mathbf{e}_3)\,\hat{R} = 1$ あるいは $\hat{R} = \hat{R}_{-\alpha'}(\mathbf{e}_3)\,\hat{R}_{-\beta'}(\mathbf{e}_2)\,\hat{R}_{-\gamma'}(\mathbf{e}_3)$ 。

これは $\alpha' = -\alpha,\ \beta' = -\beta,\ \gamma' = -\gamma$ とすれば (2-1) $\hat{R}_{\alpha\beta\gamma} = \hat{R}_\alpha(\mathbf{e}_3)\,\hat{R}_\beta(\mathbf{e}_2)\,\hat{R}_\gamma(\mathbf{e}_3)$ にほかならない。



通常は、$\hat{R}_\alpha, \hat{R}_\beta, \hat{R}_\gamma$ の表現を

$$R_\alpha(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\beta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$R_\gamma(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ととって、(α, β, γ) をオイラー（Euler）角と呼ぶ。

3、リー代数とその表現

$\mathbf{e}_1$ 軸のまわりに角度 α だけ回転させる行列は、

$$R_\alpha(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

となる。

α を微小量として J_1 を $\hat{J}_1$ の行列表現とすれば、

$$R_\alpha(e_1) \equiv \exp(-i\alpha J_1) \approx 1 - i\alpha J_1 \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}1{:}\ 1)$$

となる。

同様に、

$$R_\beta(\mathbf{e}_2) \equiv \exp(-i\beta J_2) \approx 1 - i\beta J_2 \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}1{:}\ 2)$$

$$R_\gamma(\mathbf{e}_3) \equiv \exp(-i\gamma J_3) \approx 1 - i\gamma J_3 \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}1{:}\ 3)$$

J_1, J_2, J_3 の交換関係は、すぐ確かめられるように $[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k$ となる。　(3-2)

ϵ_{ijk} はレビ・チビタ（Levi-Civita）記号と呼ばれ、次のように定義される。

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i\,j\,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の偶置換} \\ -1 & (i\,j\,k) \text{ が } (1,2,3) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ϵ_{ijk} は３次元回転群 **SO**(3) のリー代数を定める構造定数に対応する。

J_1, J_2, J_3 は、そのリー代数の随伴表現となる。

回転群 **SO**(3) の表現を求める問題はオイラー回転 $\hat{R}_{\alpha\beta\gamma}$ に対応する一般の行列表現 $D(R_{\alpha\beta\gamma})$ を求めることである。とくに **SO**(3) 群を定義する３次元表現、一般には何次元行列でもよい。ただし、すべての回転に対して $D(R_{\alpha\beta\gamma})$ が同時にブロック状に対角化されない場合、その表現 D は既約であるという（ブロック対角化された形になるとき、これを可約表現と言うが、逆にどうやってもこのようなブロック対角化が不可能な場合、その表現を既約表現という）。ここでは連続群の既約表現を求めるのに、直接その群の表現 $D(R_{\alpha\beta\gamma})$ を求めるかわりに、その群のリー代数の表現を求めることによって実行する。リー群の表現は、そのリー代数の積の無限項の和で表わされるから、リー代数の表現が既約ならば、その群の表現も既約である。

回転群 **SO**(3) の場合は、まず (3-2) と同じ交換関係を満たす代数の既約表現 J_a $(a = 1, 2, 3)$ を求める。

すると一般の回転群 **SO**(3) の表現は

$$D(R_{\alpha\beta\gamma}) = \exp(-i\alpha J_3)\exp(-i\beta J_2)\exp(-i\gamma J_3) \qquad (3\text{-}3)$$

で与えられる。

J_a が n 次元行列のとき、それに対応する回転群の表現も n 次元行列になる。

回転群はユニタリ群の一種であるから、$D(R_{\alpha\beta\gamma})$ はユニタリ行列である。したがって、そのリー代数の表現 J_a $(a = 1, 2, 3)$ はエルミート行列になる。エルミート行列は適当なユニタリ行列によって対角化できるから、通常は J_3 が対角化される表示が採用される。

回転群 **SO**(3) の場合、$\hat{J}_a$ は角運動量演算子と呼ばれている。　補論 3-1　page9 参照

$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$ を定義する。

交換関係　$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_1] = [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_2] = [\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_3] = 0$ を得る（交換可能）。

$\hat{J}_3$, $\hat{\mathbf{J}}^2$ は交換可能であるから、共通な固有ベクトルが存在し、

$\hat{J}_3 \,|\, J, m> = m \,|\, J, m>$

$\hat{\mathbf{J}}^2 \,|\, J, m> = J \,|\, J, m>$ とする。（ディラック記法　量子力学「ディラックのブラケット記法」参照）

$\hat{J}_a$ $(a = 1, 2, 3)$ の代わりに、$\hat{J}_3$, $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ を独立な演算子として採用する。

交換関係は $[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$,　$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_\pm] = 0$,　$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3$　となる。

この交換関係１式と２式を $|J, \mathrm{m}>$ に作用させてみると、

$\hat{J}_3 \hat{J}_\pm |J, \mathrm{m}> = (\mathrm{m} \pm 1) \hat{J}_\pm |J, \mathrm{m}>$

$\hat{\mathbf{J}}^2 \hat{J}_\pm |J, \mathrm{m}> = J \hat{J}_\pm |J, \mathrm{m}>$

これは $\hat{J}_\pm |J, \mathrm{m}>$ が、$\hat{\mathbf{J}}^2$ と $\hat{J}_3$ に対して固有値 J と $\mathrm{m} \pm 1$ をもつ固有ベクトル $|J, \mathrm{m} \pm 1>$ であることを示している。

したがって、$C^{(\pm)}_{J,\mathrm{m}}$ を定数として、$\hat{J}_\pm |J, \mathrm{m}> = C^{(\pm)}_{J,\mathrm{m}} \; |J, \mathrm{m} \pm 1>$ が成立する。

$\hat{J}_\pm$ を乗ずると、$\hat{J}_3$ の固有値は１つずつ増減するが、$\hat{\mathbf{J}}^2$ の固有値は不変であるということは、m の値には上限と下限が存在しなければならないことを意味している。

∵　$\hat{J}_\pm$ の作用により増減させていったとき、固有ベクトルが最終的に $\hat{J}_+ |J, \mathrm{j}> = 0$ 、$\hat{J}_- |J, \mathrm{j}'> = 0$ (j は上限、j′ は下限）のような条件に行きつくようにはならず、無限に新しいベクトルが作られるものとすると、$\hat{J}_3$ の固有値は限りなく大きくなり、従って $\hat{J}_3{}^2$ の固有値についても同様である。ところが、$\hat{\mathbf{J}}^2$ の固有値は不変であるから $\hat{J}_1{}^2 + \hat{J}_2{}^2 = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_3{}^2$ の固有値はいずれ負になってしまう。ところが、$\hat{J}_1$、$\hat{J}_2$ はエルミート演算子であるから、$\hat{J}_1{}^2 + \hat{J}_2{}^2$ の固有値は負になることはない。これは、$\hat{J}_+ |J, \mathrm{j}> = 0$ 、$\hat{J}_- |J, \mathrm{j}'> = 0$ の条件が必ず存在することを意味するものである。

上限を j 、下限を j′ とすると、（m のとりえる値は、j , j − 1 , ……… , j′ + 1 , j′　　← j − j′ + 1 個 ）

$\hat{J}_+ |J, \mathrm{j}> = 0$

$\hat{J}_- |J, \mathrm{j}'> = 0$

$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_3 + \hat{J}_3{}^2$

$\quad = \hat{J}_+ \hat{J}_- - \hat{J}_3 + \hat{J}_3{}^2$ より、

$\hat{\mathbf{J}}^2 |J, \mathrm{j}> = \mathrm{j}(\mathrm{j}+1) |J, \mathrm{j}>$

$\hat{\mathbf{J}}^2 |J, \mathrm{j}'> = -\mathrm{j}'(-\mathrm{j}'+1) |J, \mathrm{j}'>$

$\therefore \quad \mathrm{j}(\mathrm{j}+1) = -\mathrm{j}'(-\mathrm{j}'+1)$

$(\mathrm{j}+\mathrm{j}')(\mathrm{j}-\mathrm{j}'+1) = 0$

$\mathrm{j} = -\mathrm{j}'$

$\mathrm{j} - \mathrm{j}' = 2\mathrm{j}$ が 0 または正整数であるから（j を１ずつ減らして $\mathrm{j}' = -\mathrm{j}$ にたどりつく）、

j のとりえる値は、0 , 1/2 , 1 , 3/2 , 2 , ………

また、１つの j が与えられたとき、m のとりえる値は、j , j − 1 , ……… , − j + 1 , − j

まとめると、（ベクトルの指標も j - 表現に変更して、$|\mathrm{j}, \mathrm{m_j}>$ 等とする）

$\hat{\mathbf{J}}^2 |\mathrm{j}, \mathrm{m_j}> = \mathrm{j}(\mathrm{j}+1) |\mathrm{j}, \mathrm{m_j}>$　　j のとりえる値は、0 , 1/2 , 1 , 3/2 , 2 , ………

$\hat{J}_3 |\mathrm{j}, \mathrm{m_j}> = \mathrm{m_j} |\mathrm{j}, \mathrm{m_j}>$　　$\mathrm{m_j}$ のとりえる値は、j , j − 1 , ……… , − j + 1 , − j

$\hat{J}_\pm |\mathrm{j}, \mathrm{m_j}> = \sqrt{(\mathrm{j} \mp \mathrm{m_j})(\mathrm{j} \pm \mathrm{m_j} + 1)} \; |\mathrm{j}, \mathrm{m_j} \pm 1>$　　昇降演算子 *

演算子 $\hat{J}_\pm$, $\hat{J}_3$ に対応する j - 表現の行列要素は、

$<\mathrm{m_j} \pm 1| \hat{J}_\pm | \mathrm{m_j}> = \sqrt{(\mathrm{j} \mp \mathrm{m_j})(\mathrm{j} \pm \mathrm{m_j} + 1)}$

$<\mathrm{m_j} | \hat{J}_3 | \mathrm{m_j}> = \mathrm{m_j}$

他の要素はすべて 0 である。

* ///

$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i \hat{J}_2 \qquad \hat{J}_-{}^\dagger = \hat{J}_+ \qquad \hat{J}_+{}^\dagger = \hat{J}_-$

$\hat{\boldsymbol{J}}^2 = \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_3 + \hat{J}_3{}^2 = \hat{J}_+ \hat{J}_- - \hat{J}_3 + \hat{J}_3{}^2$

$\hat{\boldsymbol{J}}^2 |j, m_j> = j(j+1) |j, m_j>$

$\hat{J}_3 |j, m_j> = m_j |j, m_j>$

これらを使うと、

$|\hat{J}_+ | m>|^2 = <m| \hat{J}_- \hat{J}_+ |m> = <m| (\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_3{}^2 - \hat{J}_3) |m> = j(j+1) - m^2 - m = (j-m)(j+m+1)$

$| \hat{J}_- | m > |^2 = < m | \hat{J}_+ \hat{J}_- | m > = < m | (\hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_3{}^2 + \hat{J}_3) | m > = j(j+1) - m^2 + m = (j+m)(j-m+1)$

ここで、$\hat{J}_\pm | m > \propto | m \pm 1 >$ を考慮すると、$\hat{J}_\pm | m >$ が、次のように書けることがわかる。

$\hat{J}_\pm | m > = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\ | m \pm 1 >$

//

これによって回転群 **SO**(3) に対するリー代数の既約表現がすべて決まったことになる。既約表現を指定するパラメーターは j で、j を指定すると、その表現の次元は 2 j + 1 であり、2 j + 1 個の基底ベクトルは $\hat{J}_3$ の固有値 m_j で区別される。m_j は一般にウエイト（weight）と呼ばれる。　注釈 3-1

とくに j = 1 の表現は、**SO**(3) 群を定義する３行３列表現である。これらは、リー代数 $\mathfrak{so}(3)$ の随伴表現（adjoint representation）と呼ばれ、そのウエイトはとくにルート（root）と呼ばれている。随伴表現とそのルートは、のちに述べるように、一般のリー代数においては表現を求める上でより基本的な役割を果たすことになる。

補論 3-2 page11 参照

4、角運動量の合成とクレプシュ - ゴルダン係数

２つの角運動量の結合を考える：$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$　　(1)

２つの角運動量は互いに可換であるとする。すなわち、$\mathbf{J}_1$ と $\mathbf{J}_2$ は異なる空間（異なる波動関数）に作用する場合を考える。たとえば、スピン角運動量と軌道角運動量の結合、２つの粒子の角運動量の結合などである。

２つの部分の波動関数を $|j_1\, m_1>$、$|j_2\, m_2>$、結合した状態の波動関数を $|j\, m>$ とする（j_1 等は既約表現を指定するパラメーター、m_1 はその基底ベクトルを表す）。このとき、

$\mathbf{J}_1{}^2\, |j_1\, m_1> = j_1(j_1+1)\, |j_1\, m_1>$,　　$J_{1z}\, |j_1\, m_1> = m_1\, |j_1\, m_1>$

$\mathbf{J}_2{}^2\, |j_2\, m_2> = j_2(j_2+1)\, |j_2\, m_2>$,　　$J_{2z}\, |j_2\, m_2> = m_2\, |j_2\, m_2>$

$\mathbf{J}^2\ |j\, m> = j(j+1)\, |j\, m>$,　　$J_z\, |j\, m> = m\, |j\, m>$

さて、2 種類の角運動量 $\mathbf{J}_1$ と $\mathbf{J}_2$ がある時、それぞれの角運動量演算子の固有状態の直積として $|j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$ を定義できる。

$\mathbf{J}_1{}^2\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2> = j_1(j_1+1)\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$,　　$J_{1z}\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2> = m_1\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$

$\mathbf{J}_2{}^2\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2> = j_2(j_2+1)\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$,　　$J_{2z}\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2> = m_2\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$

$J_z\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2> = (m_1 + m_2)\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$

ただし、状態 $|j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$ は合成角運動量の 2 乗 $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$ の固有状態にはなっていない。

今、$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$ と $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ の同時固有状態 $|j\, m>$ が複数の $|j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$ の線形結合で与えられているとする。

$|j\, m> = \sum_{m_1, m_2} C^{(j\, m)}_{m_1\, m_2}\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$　　(2)

ここで、展開係数 $C^{(j\, m)}_{m_1\, m_2} \equiv <j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2\, |\, j\, m>$ はクレプシュ・ゴルダン係数とよばれる。

http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/GT/GT02.pdf　「積表現（直積表現）」参照

基底の直積 $|j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$ は、$|j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2>$ と書かれることも多い。すると (2) は、

$|j\, m> = \sum_{m_1, m_2} <j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2\, |\, j\, m>|j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2>$　　(2)′

クレプシュ・ゴルダン係数が $<j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2\, |\, j\, m>$ のように書かれるのにも理由がある。(2)′ の左から $<j_1\, m'_1\, ; j_2\, m'_2|$ を掛けてその定義（基底）からくる直交性

$<j_1\, m'_1\, ; j_2\, m'_2\, |\, j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2> = \delta_{m_1 m'_1}\, \delta_{m_2 m'_2}$

を使えば分かるように、この係数は $<j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2\, |$ と $|j\, m>$ の内積そのものである。

クレプシュ - ゴルダン係数は次の性質をもつ。　注釈 4-1

① $m_1 + m_2 = m$ でない場合は、$C^{(j\, m)}_{m_1\, m_2} \equiv <j_1\, m_1\, ; j_2\, m_2\, |\, j\, m> = 0$

説明 ///////////

$J_z\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2> = (m_1 + m_2)\, |j_1\, m_1>|j_2\, m_2>$ なので、(2) の両辺に J_z を作用させると、

$m\,|j\,m> = \sum_{m_1, m_2} (m_1 + m_2)\, C^{(j\,m)}_{m_1\,m_2}\ |j_1\,m_1>|j_2\,m_2>$

左辺を (2) で展開すると、$(m - m_1 + m_2) \sum_{m_1, m_2} C^{(j\,m)}_{m_1\,m_2} |j_1\,m_1>|j_2\,m_2> = 0$

$|j_1\,m_1>|j_2\,m_2>$ は一次独立なので、$(m - m_1 + m_2)\, C^{(j\,m)}_{m_1\,m_2} = 0$

②次の直交関係が成り立つ。

$\sum_{m_1, m_2} <j\,m\,|\,j_1\,m_1\,;j_2\,m_2><j_1\,m_1\,;j_2\,m_2\,|\,j'\,m'> = \delta_{jj'}\,\delta_{mm'}$　　(a)

$\sum_{j, m} <j_1\,m_1\,;j_2\,m_2\,|\,j\,m><j\,m\,|\,j_1\,m'_1\,;j_2\,m'_2> = \delta_{m_1m'_1}\,\delta_{m_2m'_2}$　　(b)

説明 ///////////

$\mathbf{J}^2$ の固有関数および積波動関数の直交性を用いる。

$<j\,m\,|\,j'\,m'> = \delta_{jj'}\,\delta_{mm'}$,　　$<j_1\,m_1\,;j_2\,m_2\,|\,j_1\,m'_1\,;j_2\,m'_2> = \delta_{m_1m'_1}\,\delta_{m_2m'_2}$

左式を (2)′ で展開すると、(a) が直ちに得られる。

また，角運動量を合成して得られる状態 $|\,j\,m>$ の完全性 $\sum_{j, m} |\,j\,m><j\,m\,| = 1$ を用いると (b) が得られる。

③ (2)′ の逆変換は次の式で与えられる。

$|j_1\,m_1\,;j_2\,m_2> = \sum_{j, m} <j\,m\,|\,j_1\,m_1\,;j_2\,m_2>\,|\,j\,m>$　　この $<j\,m\,|\,j_1\,m_1\,;j_2\,m_2>$ もクレプシュ - ゴルダン係数と呼ばれる。

m についての和は、$m = m_1 + m_2$ 以外は係数が 0 である。

説明 ///////////

積波動関数の集合 $\{|\,j_1\,m_1\,;j_2\,m_2>\}$ から合成された角運動量の固有状態の集合 $\{|\,j\,m>\}$ への変換 (2) は、$|\,j\,m>$ が規格直交化された状態であることから、ユニタリー変換である。従って、逆変換 が得られる。

④ j_1 と j_2 が与えられたとき、合成された角運動量 j が取る値は、最小値 $|\,j_1 - j_2\,|$ から最大値 $j_1 + j_2$ までで、隣合う値の差は 1 である。

$j = |\,j_1 - j_2\,|,\ |\,j_1 - j_2\,| + 1,\ \cdots\cdots,\ j_1 + j_2 - 1,\ j_1 + j_2$

説明 ///////////

積波動関数の集合 $\{|\,j_1\,m_1\,;j_2\,m_2>\}$ の独立な状態の数は $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ であるが，これは合成した波動関数の集合 $\{|\,j\,m>\}$ に属する状態の数 $\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ に等しい。

昇降演算子 $J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm}$ を (2) の左辺、右辺のそれぞれに作用させると、左辺は

$J_\pm\,|j\,m> = \sqrt{j(j + 1) - m(m \pm 1)}\ |j\,m{\pm}1>$　　(3)　　$(\,j \mp m\,)(\,j \pm m + 1) = j(j + 1) - m(m \pm 1)$

右辺は

$J_\pm\,|j\,m> = \sum_{m_1, m_2} C^{(j\,m)}_{m_1\,m_2}\ [(J_{1\pm}\,|j_1\,m_1>)|j_2\,m_2> + |j_1\,m_1>(J_{2\pm}\,|j_2\,m_2>)]$

$= \sum_{m_1, m_2} C^{(j\,m)}_{m_1\,m_2} [\ \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 \pm 1)}\ \ |j_1\,m_1{\pm}1>|j_2\,m_2> + \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 \pm 1)}\ \ |j_1\,m_1>|j_2\,m_2{\pm}1>\ ]$　　(4)

これより、

$\sqrt{j(j + 1) - m(m \pm 1)}\ \ |j\,m{\pm}1> =$

$\sum_{m_1, m_2} C^{(j\,m)}_{m_1\,m_2}\ [\ \sqrt{j_1(j_1 + 1) - m_1(m_1 \pm 1)}\ \ |j_1\,m_1{\pm}1>|j_2\,m_2> + \sqrt{j_2(j_2 + 1) - m_2(m_2 \pm 1)}\ \ |j_1\,m_1>|j_2\,m_2{\pm}1>\ ]$　　(6)

となる。

ここで、既約表現パラメータ $j =\ j_1 + j_2$ のもとでの最高ウェイトの状態を考えると、それは一つしかなく $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$ の場合である。これと同じ既約表現（$j =\ j_1 + j_2$）に属する他の状態は、J_- を順次作用させることによって求められる。

最高ウェイト状態 $|j\ j>$　　(7)　　$|j\ j> = |j_1\ j_1>|j_2\ j_2>$　　クレプシュ - ゴルダン係数 $<j_1\ j_1\,;j_2\ j_2\,|j\ j> = 1$

(3) は、$J_-\,|j\ j>\,j = \sqrt{2j}\ \ |j\ j{-}1>$

(4) は、$J_-\,|j\ j> = \sqrt{j_1(j_1 + 1) - j_1(j_1 - 1)}\ \ |j_1\ j_1{-}1>|j_2\ j_2> + \sqrt{j_2(j_2 - 1) - j_2(j_2 - 1)}\ \ |j_1\ j_1>|j_2\ j_2{-}1>$

$= \sqrt{2j_1}\ \ |j_1\ j_1{-}1>|j_2\ j_2> + \sqrt{2j_2}\ \ |j_1\ j_1>|j_2\ j_2{-}1>$

これより、規格化された $(j\ j{-}1)$ の状態は、$|j\ j{-}1> = \sqrt{j_1/j}\ \ |j_1\ j_1{-}1>|j_2\ j_2> + \sqrt{j_2/j}\ \ |j_1\ j_1>|j_2\ j_2{-}1>$　　(8)

クレプシュ - ゴルダン係数 $<j_1\ j_1-1\,;j_2\ j_2\,|j\ j-1> = \sqrt{j_1/j}$　　$<j_1\ j_1\,;j_2\ j_2-1\,|j\ j-1> = \sqrt{j_2/j}$

(8) にもう一度 J_- を作用させれば、同様にして $|j\ j-2>$ が求まり、これを繰り返すことによって既約表現 $j = j_1 + j_2$ に対応する $2j + 1$ 個の状態が定まる。

次に角運動量の大きさが 1 つ小さい $j = j_1 + j_2 - 1$ をもつ既約表現の状態を求めてみると、この既約表現の最高ウェイトは $m = j_1 + j_2 - 1$ である。このような状態は、$|j_1\ j_1-1>|j_2\ j_2>$ と $|j_1\ j_1>|j_2\ j_2-1>$ の線形結合以外にはないが、そのうちの 1 つは (8) によって $j = j_1 + j_2$ の状態に属している。したがって、(8) に直交し $m = j_1 + j_2 - 1$ を持つ状態は一意的に定まり、

$$|j_1+j_2-1\ \ j_1+j_2-1> = \sqrt{j_2/(j_1+j_2)}\ |j_1\ j_1-1>|j_2\ j_2> - \sqrt{j_1/(j_1+j_2)}\ |j_1\ j_1>|j_2\ j_2-1> \qquad (9)$$

となる。

(9) は $j = j_1 + j_2 - 1$ をもつ既約表現の最高ウェイト状態であるから、この両辺に J_- を順次作用させて $2(j_1 + j_2 - 1) + 1 = 2(j_1 + j_2) - 1$ 個のすべての状態を作ることができる。

以下同様に、$j = j_1 + j_2 - 2$ をもつ既約表現の最高ウェイト状態は、$|j_1\ j_1-2>|j_2\ j_2>$, $|j_1\ j_1-1>|j_2\ j_2-1>$, $|j_1\ j_1>|j_2\ j_2-2>$ の線形結合で与えられるはずであるが、すでに同じ $m = j_1 + j_2 - 2$ を持つ状態の 2 つ $|j_1+j_2\ \ j_1+j_2-2>$, $|j_1+j_2-1\ \ j_1+j_2-2>$ は求まっている。この 2 つに直交する線形結合は規格化を除いて一意的に定まる。こうして最高ウェイト状態 $|j_1+j_2-2\ \ j_1+j_2-2>$ が求まれば、J_- を順次作用させてこの既約表現をすべて定めることができる。

$$\begin{array}{lllll}
|j_1+j_2\ \ j_1+j_2> \text{最高ウェイト (7)} & & & & \\
\quad J_-\downarrow & & & & \\
|j_1+j_2\ \ j_1+j_2-1>\text{(8)} & \perp\rightarrow & |j_1+j_2-1\ \ j_1+j_2-1> \text{最高ウェイト (9)} & & \\
\quad J_-\downarrow & & \quad J_-\downarrow & & \\
|j_1+j_2\ \ j_1+j_2-2> & & |j_1+j_2-1\ \ j_1+j_2-2> & \perp\rightarrow & |j_1+j_2-2\ \ j_1+j_2-2> \text{最高ウェイト} \\
\quad J_-\downarrow & & \quad J_-\downarrow & & \quad J_-\downarrow \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

5、スピン 1/2 と **SU**(2)

回転群の既約表現を求めるのに、そのリー代数の既約表現を求めることによって実行してきたが、その結果、既約表現は 0 , 1/2 , 1 , 3/2 , 2 , ……… の値をとる j によって区別される。原理的にはリー代数 J_a の既約表現が求まれば、その j - 表現行列 $J_a^{(j)}$ をオイラー回転 $D(R_{\alpha\beta\gamma})$ (3-3) の J_a に代入すればよい。

既約表現を区別する数 j を物理学ではスピンあるいは角運動量の大きさと呼んでいる。

スピンが 0 の場合は、回転群のリー代数がすべて 0、したがって回転行列はすべて 1 となり、恒等表現にほかならない。

スピンが 1 の場合は、J_a (a = 1, 2, 3) が 3×3 行列で与えられ、それぞれの具体形は (3-1) である。これを (3-3) に代入すれば、結果はオイラー回転行列そのものである。

スピンが 1/2 の場合

リー代数 **J** の表現は、$\mathbf{J}^{(1/2)} = \mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$

ただし、$\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ（Pauli）行列　$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$　$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

この場合の表現行列 (3-3) は、次のようになる。

$$D^{(1/2)}(R_{\alpha\beta\gamma}) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2}\sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2}\cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

しかしここで、オイラー角（α,β,γ）の変域を通常通り $0 \leqq \alpha, \gamma < 2\pi$, $0 \leqq \beta < \pi$ ととると $(\alpha\ \beta\ \gamma) = (2\pi\ 0\ 0)$ のとき $D^{(1/2)}(R_{2\pi\,0\,0}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となって単位行列にはならない（0 と 2π のときが一致しない）。変域をかえて $0 \leqq \alpha, \gamma \leqq 4\pi$, $0 \leqq \beta \leqq \pi$ ととれば $(\alpha\ \beta\ \gamma) = (4\pi\ 0\ 0)$ あるいは $(\alpha\ \beta\ \gamma) = (0\ 0\ 4\pi)$ のとき $D^{(1/2)}$ は単位行列になるが、この表現を許すと、１つの空間回転に対して２つの表現 $D^{(1/2)}$、$-D^{(1/2)}$ が存在することになる。この事情はスピンが半奇数の場合は一般に起こるので、これらは回転群 **SO**(3) の２価表現あるいは射影表現（projective representation）と呼ばれている。

補論 5-1　page13 参照

２×２行列に対してパラメーター変域 $0 \leqq \alpha, \gamma \leqq 4\pi$, $0 \leqq \beta \leqq \pi$ をもつ変換は、**SU**(2) 群と呼ばれる群である。この意味で、半奇数スピン表現は **SU**(2) の表現であるが、**SO**(3) の表現ではない。

回転群 **SO**(3) のパラメーター空間は、球面上の対極点が同一視されるから、コンパクトではあるが単連結な空間ではない。一方、**SU**(2) 群のパラメーター空間は、ユニタリ行列の作る群であるから、コンパクトで単連結である。**SO**(3) も **SU**(2) も同一のリー代数を持っているので、リー代数を使って求めた表現は **SU**(2) の表現になる。このうちパラメーター変域 $0 \leqq \alpha, \gamma < 2\pi$, $0 \leqq \beta < \pi$ に対して１価表現になるもの（j が 0 および正整数のとき）が **SO**(3) の表現になるということである。つまり、**SU**(2) は **SO**(3) の普遍被覆群ということになる。$\mathbf{C}_2$ を２次の巡回群として、$\mathbf{SO}(3) = \mathbf{SU}(2)/\mathbf{C}_2$ の関係になる。

Ⅲ章「リー連続群とリー代数／５普遍被覆群」参照

自然界にはスピン 1/2 の粒子が存在するので、われわれの空間は **SU**(2) であるとも言えるし、しかしまた、空間は **SO**(3) であるが、物体はその射影表現を許すといってもよい。

補論 3-1　page3

一般角運動量

http://www.f-denshi.com/000okite/100ryosi/130angular-gen.html

交換関係 $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$（角運動量の定義）　　具体的には、$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3$, $[\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1$, $[\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2$

定義　① $\hat{\boldsymbol{J}}^2 \equiv \hat{J}_1^{\,2} + \hat{J}_2^{\,2} + \hat{J}_3^{\,2}$

② $\hat{J}_+ \equiv \hat{J}_1 + i\hat{J}_2$　　（上昇演算子　この意味は後ほど明らかになる）

③ $\hat{J}_- \equiv \hat{J}_1 - i\hat{J}_2$　　（下降演算子）

$\hat{J}_+$ と $\hat{J}_-$ は互いにエルミート共役の関係になる。　$\hat{J}_-^{\dagger} = \hat{J}_+$,　$\hat{J}_+^{\dagger} = \hat{J}_-$

公式

$$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_1] = [\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_2] = [\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_3] = 0$$

$$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_\pm] = 0$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3$$

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$$

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_3^{\,2} + \hat{J}_3$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{\boldsymbol{J}}^2 - \hat{J}_3^{\,2} - \hat{J}_3$$

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2 = (\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)/2 + \hat{J}_3^{\,2}$$

$\hat{J}_3$, $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ は交換可能であるから、共通な固有ベクトルが存在し、

$$\hat{J}_3\,|\,l, m> = m\,|\,l, m>$$

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2\,|\,l, m> = l\,|\,l, m>$$

とする。

$[\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2$,　$[\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1$ から、

$$\hat{J}_3\hat{J}_1 = i\hat{J}_2 + \hat{J}_1\hat{J}_3$$

$$\hat{J}_3\hat{J}_2 = -i\hat{J}_1 + \hat{J}_2\hat{J}_3$$

両辺とも規格化されている同時固有ケット $|\,l, m>$ に作用させて，

$$\hat{J}_3\hat{J}_1\,|\,l, m> = (i\hat{J}_2 + m\hat{J}_1)\,|\,l, m>$$

$$\hat{J}_3\hat{J}_2\,|\,l, m> = (-i\hat{J}_1 + m\hat{J}_2)\,|\,l, m> = -i(\hat{J}_1 + i\,m\hat{J}_2)\,|\,l, m>$$

この第 1 式と第 2 式に $\pm i$ を掛けて加算すれば、

$$\hat{J}_3(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,|\,l, m> = ((m \pm 1)\hat{J}_1 + (1 \pm m)\,i\hat{J}_2)\,|\,l, m> = (m \pm 1)(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,|\,l, m>$$

この式は $(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,|\,l, m>$ が $\hat{J}_3$ の固有ケットであり，固有値が $m \pm 1$ であることを示している。

さらに、$(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,|\,l, m>$ が $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有ケット（のまま）であることは、

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,|\,l, m> = (\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\hat{\boldsymbol{J}}^2\,|\,l, m> = ((\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,l\,|\,l, m> = l(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,|\,l, m>$$　← $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ は $\hat{J}_i$ と交換可

から分かる。

つまり、昇降演算子 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ は $\hat{J}_3$ に対する固有値が m である固有ケットに作用して、$\hat{J}_3$ に対する固有値が $m \pm 1$ である固有ケットへ変換させる作用を持っていることが分かった。

ただし、$(\hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2)\,|\,l, m>$ は規格化されているかどうかはわからないので、後で規格化を検討しなければならない。

とりあえず、

$\hat{J}_\pm\,|\,l, m> = C_\pm\,|\,l, m \pm 1>$　　　$C_\pm$：規格化定数

と書いておく。

さて、$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値 j を一つ定めると角運動量の大きさ（有限値）も定まるので、対応するその成分 $\hat{J}_3$ の固有値 m の値は有限となるはずである。そこで、その最大値を m_{max}、最小値を m_{min} と書くことにする。

この記号の下で、$|\,l, m_{max}>$ に $\hat{J}_-$ を繰り返し作用させていくと、固有ケットの列、

$|\,l, m_{max}>$, $|\,l, m_{max} - 1>$, …… , $|\,l, m_{min}>$

と対応する固有値の列、

m_{max} , $m_{max} - 1$, …… , m_{min}

が得られる。

そこで、$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3$ を $<l, m\,|$ と $|\,l, m>$ とで挟むと、

右辺 $=<l, m|2\hat{J}_3|l, m>$　　　$\hat{J}_3|l, m>=m|l, m>$

$=2m$

左辺 $=<l, m|[\hat{J}_+, \hat{J}_-]|l, m>$

$=<l, m|\hat{J}_+\hat{J}_-|l, m>-<l, m|\hat{J}_-\hat{J}_+|l, m>$

恒等演算子　$\sum|l, m'><l, m'|$ を挿入

$=\sum_{m'}<l, m|\hat{J}_+|l, m'><l, m'|\hat{J}_-|l, m>-\sum_{m'}<l, m|\hat{J}_-|l, m'><l, m'|\hat{J}_+|l, m>$

ゼロでない項を与えるのは、$m'=m-1$ と $m+1$ の場合だけ

$=<l, m|\hat{J}_+|l, m-1><l, m-1|\hat{J}_-|l, m>-<l, m|\hat{J}_-|l, m+1><l, m+1|\hat{J}_+|l, m>$

ここで、$<l, m|\hat{J}_+|l, m-1>=<l, m-1|\hat{J}_-|l, m>^\dagger$、$<l, m+1|\hat{J}_+|l, m>=<l, m|\hat{J}_-|l, m+1>^\dagger$

$=|<l, m-1|\hat{J}_-|l, m>|^2-|<l, m|\hat{J}_-|l, m+1>|^2$

以上より、$|<l, m-1|\hat{J}_-|l, m>|^2-|<l, m|\hat{J}_-|l, m+1>|^2=2m$

この式について、$m=m_{max}$ から $m=m_{min}$ まですべて並べて足し合わせると、

$|<l, m_{max}-1|\hat{J}_-|l, m_{max}>|^2=2m_{max}$

$|<l, m_{max}-2|\hat{J}_-|l, m_{max}-1>|^2-|<l, m_{max}-1|\hat{J}_-|l, m_{max}>|^2=2(m_{max}-1)$

………………………………………………………………………

$|<l, m_{min}|\hat{J}_-|l, m_{min}+1>|^2-|<l, m_{min}+1|\hat{J}_-|l, m_{min}+2>|^2=2(m_{min}+1)$

$-|<l, m_{min}|\hat{J}_-|l, m_{min}+1>|^2=2m_{min}$

$+$

$0=(m_{max}+m_{min})(m_{max}-m_{min}+1)$

$m_{max}-m_{min}+1>0$ なので、

$m_{max}=-m_{min}$

すると、$m_{max}-m_{min}=2m_{max}$ でなければならないが、$m_{max}-m_{min}$ は昇降演算子の性質から 0 か整数でなければならないので、

$m_{max}=n/2$　　$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$　　$\rightarrow$ m_{max} は整数または半整数

すなわち、この m_{max} を使って

$m=-m_{max}, -m_{max}+1, \cdots\cdots, m_{max}-1, m_{max}$

であることが分かる。

次に、1行目から $(m_{max}-m+1)$ 行目までを合計すると、

$|<l, m-1|\hat{J}_-|l, m>|^2=(m_{max}+m)(m_{max}-m+1)$

すなわち、

$<l, m-1|\hat{J}_-|l, m>=\sqrt{(m_{max}+m)(m_{max}-m+1)}$

また、この式のエルミート共役をとると、

$<l, m|\hat{J}_+|l, m-1>=\sqrt{(m_{max}+m)(m_{max}-m+1)}$

さらに、$m\rightarrow m+1$ と記号を代えてやると、

$<l, m+1|\hat{J}_+|l, m>=\sqrt{(m_{max}-m)(m_{max}+m+1)}$

このエルミート共役をとると、

$<l, m|\hat{J}_-|l, m+1>=\sqrt{(m_{max}-m)(m_{max}+m+1)}$

$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ についても、同様に $<l, m|$ と $|l, m>$ で挟んで、これまでの計算結果を利用してやると、

$<l, m|\hat{\boldsymbol{J}}^2|l, m>$

$=<l, m|(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_-\hat{J}_+)/2+\hat{J}_3^2|l, m>$

$=<l, m|\hat{J}_+\hat{J}_-/2|l, m>+<l, m|\hat{J}_-\hat{J}_+/2|l, m>+<l, m|\hat{J}_3^2|l, m>$

$=<l, m|\hat{J}_+\hat{J}_-/2|l, m>+<l, m|\hat{J}_-\hat{J}_+/2|l, m>+<l, m|\hat{J}_3^2|l, m>$

$=|<l, m-1|\hat{J}_-|l, m>|^2/2+|<l, m|\hat{J}_-|l, m+1>|^2/2+<l, m|\hat{J}_3^2|l, m>$

$= (m_{max}+m)(m_{max}-m+1)/2+(m_{max}-m)(m_{max}+m+1)/2+m^2$

$= m_{max}(m_{max}+1)$

となり、$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値が、$\hat{J}_3$ の固有値 m に関係なく、l ごとに定まる m_{max} だけに依存することが分かる。

そこで、新記号 $j = m_{max}$ を導入し、この新記号で全面的に書き改め、まとめておくと、

角運動量固有ケットと固有値

$\hat{\boldsymbol{J}}^2 | j, m> = j(j+1) | j, m>$

$\hat{J}_3 | j, m> = m | j, m>$

$j =$ 整数、半整数　$m = -j, -j+1, -j+2, \cdots\cdots, j-1, j$

昇降演算子

$\hat{J}_+ | j, m> = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\ | j, m+1>$

$\hat{J}_- | j, m> = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\ | j, m-1>$

演算子の行列要素

$<j', m' | \hat{J}_3 | j, m> = m\,\delta_{j'j}\,\delta_{m'm}$

$<j', m' | \hat{\boldsymbol{J}}^2 | j, m> = j(j+1)\,\delta_{j'j}\,\delta_{m'm}$

$<j', m' | \hat{J}_+ | j, m> = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\ \delta_{j'j}\,\delta_{m'm+1}$

$<j', m' | \hat{J}_- | j, m> = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\ \delta_{j'j}\,\delta_{m'm-1}$

補論 3-2　page5　「V　単純リー代数とルート空間」の知識が必要となる。

回転群 **SO**(3)　http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/MP3_15/mp3_note.pdf　p80

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J_1, J_2, J_3 の交換関係は、$[J_1, J_2] = iJ_3$, $[J_2, J_3] = iJ_1$, $[J_3, J_1] = iJ_2$

あるいは、$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i\,j\,k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の偶置換} \\ -1 & (i\,j\,k) \text{ が } (1, 2, 3) \text{ の奇置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ϵ_{ijk} は 3 次元回転群 **SO**(3) のリー代数を定める構造定数

上の J_1, J_2, J_3 は、そのリー代数の随伴表現と一致する。

SO(3) はランク 1

カルタン部分代数として J_1 をとると、

$$H_1 = J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

固有値は $\alpha = \pm 1$ で、規格化固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_+ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_- = \boldsymbol{v}_+{}^*$

カルタン計量は、$g_{ij} = \epsilon_{aib}\,\epsilon_{bja} = -2\,\delta_{ij}$

カルタン標準形 $\{H_1, E_+, E_-\}$

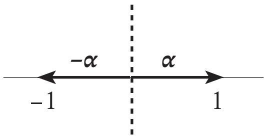
$E_+ = v^i{}_+ J_i$, $E_- = v^i{}_- J_i = v^i{}_+{}^* J_i$ より、

$$E_+ = E_-{}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$[H_1, E_\pm] = \pm E_\pm$,　$[E_+, E_-] = H_1$

ルート空間は 1 次元でそのルートの大きさを $\alpha = 1$ にとれば、$\boldsymbol{\alpha}$ 自身に対するワイル鏡映は $-\boldsymbol{\alpha}$ になる。これは

角運動量 $j = 1$ の場合にあたる。



回転群の表現　　http://www.tuhep.phys.tohoku.ac.jp/~watamura/kougi/GP2012_4.pdf　p7
http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/INP02/INP02_chap06.pdf　P11

回転群の無限小変換をなすリー代数　$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k$

回転群はユニタリー群の一種なので，回転行列はユニタリー表現を持ちそのためリー代数はエルミート行列になる。

スピン 0（$j = 0$）

スピンが 0 の場合は、回転群のリー代数がすべて 0、したがって回転行列はすべて 1 となり、恒等表現にほかならない。

スピン 1（$j = 1$）

スピンが 1 の場合は、上でみたように生成子 $J_i\,(a = 1, 2, 3)$ が 3×3 行列で与えられ、

$$\mathrm{D}(R_{\alpha\beta\gamma}) = exp(-i\,\alpha J_3)\,exp(-i\,\beta J_2)\,exp(-i\,\gamma J_3)$$

に代入すれば、結果はオイラー回転行列そのものである。

スピン $1/2$（$j = 1/2$）

もっとも簡単な生成元の交換関係は、パウリ行列の 2 × 2 エルミート行列で表現することができる。

パウリ行列　$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$　$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$J_i = \frac{1}{2}\sigma_i$$

注意するべきことは、指数 $exp(-i\,\theta J_i)$ の肩に $1/2$ がついてくるために、2π 回転ではなく 4π 回転しないと元に戻らないことで、例えば回転の単位元 $\theta = 0, 2\pi$ がそれぞれ別の 2 個の元に対応してしまう。これは、厳密な意味での表現ではなく、スピン表現が回転群の 2 価表現になっていることを意味している。

このスピン表現は **SU**(2) の基本表現になっている。

SO(3) = **SU**(2)/$\mathbf{C}_2$ である。ここで見たことは、リー環が同形であっても必ずしも群が同形であるとは限らないことを示している。この準同型写像の構造は

$$1 \to \mathbf{C}_2 \to \mathbf{SU}(2) \to \mathbf{SO}(3) \to 1$$

と表すことができる。

一般の表現

回転群の一般の表現も同様に求めることができる＝リー代数の表現が得られれば、指数写像によって回転群の表現を得ることができる。

つまり、表現を求めることは

$$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k$$

という交換関係を満たす行列を構成することに帰着する。

以下の計算は本論で議論したので、ここでは結果のみ取り上げておく。

m の上限 $m_{max} = j$：最高ウェイト

表現空間 V_j の基底 $|j, m>$ は J_3 の固有値ウェイト m でラベルされ、ウェイト m は、$m = j,\ j-1,$ …………，$-j+1,\ -j$ の値をとる。V_j は $2j+1$ 次元空間である。

演算子 $\hat{J}_{\pm}$, $\hat{J}_3$ に対応する j - 表現の行列要素は、

$$< m_j \pm 1 \,|\, \hat{J}_{\pm} \,|\, m_j > = \sqrt{(j \mp m_j)(j \pm m_j + 1)}$$

$$< m_j \,|\, \hat{J}_3 \,|\, m_j > = m_j$$

他の要素はすべて 0

例　$j = 1/2$

$$D_{1/2}(J_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_{1/2}(J_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_{1/2}(J_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D_{1/2}(J_i) = \frac{1}{2}\sigma_i \qquad \leftarrow \quad J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad J_2 = -i\frac{1}{2}(J_+ - J_-)$$

例　$j = 1$

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_- = J_+{}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_+J_- = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_-J_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

先の表現と合わせるためには、基底の取り換えを行う必要がある。

補論 5-1　page8

回転の２価表現

次の３つの２ × ２行列を導入する。

$$S_1 \equiv \sigma_1/2 \equiv 1/2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 \equiv \sigma_2/2 \equiv 1/2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 \equiv \sigma_3/2 \equiv 1/2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで、σ_i はパウリ行列である。このパウリ行列は行列群 **SU**(2) に対応するリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ を構成する。

SU(2) は２行２列の特殊ユニタリ行列の全体 $\{U: U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = 1, \det U = 1\}$ の作る群である。U のユニタリ性より $U = \exp(iX)$ と書くと X はエルミート行列で、$\det U = 1$ より $\mathrm{Tr}X = 0$ である。この行列要素は複素数なので、$2 \times 2 \times 2 = 8$ 成分持つが、行列 U がユニタリーであることから $U^{\dagger}U = 1$ より４つの条件式が存在する。また、特殊ユニタリー行列であるので、行列式が 1、すなわち $\det U = 1$ より $\mathrm{Tr}X = 0$（Ⅵ章「具体例 SU(3)」補論 1-2）、これで、さらに１つ条件が加わり、独立な成分は $8 - 4 - 1 = 3$ となる。すなわち、３つの独立なパラメータを持つ。

SU(2) 群のリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ は最も単純なコンパクトリー代数である。

パウリ行列から作られた３つの行列 S_i の交換子を計算すると

$$[S_i, S_j] = i\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}S_k \qquad i, j, k = 1, 2, 3$$

となることが示される。ここで、ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである。

こうして、リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ は３次元回転群 **SO**(3) のリー代数 $\mathfrak{so}(3)$ に準同型である。

今、ベクトルの成分を (x_1, x_2, x_3) として、

$$P \equiv 2\sum_{k=1}^{3} x_i S_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

を導入する。このとき、行列 P の行列式は、

$$\det P = -(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2)$$

となり、ベクトルの長さの２乗に負号を付けたものが得られる。したがって、行列 P の行列式を不変にする変換はベクトルの長さを変えない等長変換を与え、３次元回転を表わすことが可能であることが期待される。そこで、ある $\mathfrak{su}(2)$ の元 Q を用いて

$$P' = QPQ^{\dagger}$$

という変換を考えよう。行列 Q は $\mathfrak{su}(2)$ に属するので、$Q^{\dagger} = Q^{-1}$ であり、

$$\det P' = \det(QPQ^{\dagger}) = \det P$$

となり、等長変換を与える。

次の３つの場合を考えよう。

$$Q_1=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2)\\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix},\quad Q_2=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)\\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix},\quad Q_3=\begin{pmatrix}e^{i\theta/2} & 0\\ 0 & -e^{i\theta/2}\end{pmatrix}$$

すると、Q_1, Q_2, Q_3 による等長変換は、それぞれ 1 , 2 , 3 軸周りの角度 θ 回転を表わすことが確認できる。

例えば、Q_1 の場合

$$P'=\begin{pmatrix}x'_3 & x'_1-ix'_2\\ x'_1+ix'_2 & -x'_3\end{pmatrix}$$

$$=Q_1PQ_1{}^{\dagger}=\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2)\\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & -x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & -i\sin(\theta/2)\\ -i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_3\cos\theta-x_2\sin\theta & x_1-i(x_2\cos\theta+x_3\sin\theta)\\ x_1+i(x_2\cos\theta+x_3\sin\theta) & -x_3\cos\theta+x_2\sin\theta\end{pmatrix}$$

実部、虚部に注意して両辺を比較すると、

$$x'=x$$

$$x'_2=x_2\cos\theta+x_3\sin\theta$$

$$x'_3=-x_2\sin\theta+x_3\cos\theta$$

以上より、3 次元回転は $\mathfrak{su}(2)$ 代数で表わされることがわかった。このとき、$g(\theta_i)=e^{i\theta_i\sigma_i/2}$　として、

$$P\equiv 2\sum_{k=1}^{3}x_i\,\sigma_i$$

$$P'=g\,P\,g^{-1}=\mathrm{Ad}(g)P\qquad(\mathrm{Ad}(g)X\equiv g\,X\,g^{-1})$$

と書ける。したがって、パウリ行列 σ_i が表現空間の基底になっており、基底 σ_i で張られた表現空間のベクトル P は Ad(g)P の変換を受けている。すなわち、回転を随伴表現で表したことになっている。この表現を特に、$\mathfrak{so}(3)$ のスピノール表現とよぶ。

スピノール表現は 3 次元回転群の 2 価表現となっている。すなわち、3 次元回転群の要素 $T_i(\theta_i)$ は

$$T_i(\theta_i)=e^{i\theta_i\sigma_i/2}=\cos(\theta_i/2)+i\sin(\theta_i/2)\cdot\sigma_i$$

と書けるが、ここで

$$T_i(\theta{=}0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad T_i(\theta{=}2\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad T_i(\theta{=}4\pi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

となるので、変域を $0\le\theta\le 2\pi$ から $0\le\theta\le 4\pi$ としてはじめて元に戻ることがわかる。