# Ⅲ、リー連続群とリー代数

連続群のなかでもパラメーターの変換が解析的な関数で表されるのがリー群である。本来なら、このパラメーターの変換関係（可微分構造）から始まってリー群を定義するという形をとることが多いが、ここでは省力化して、リー群の具体例をみたうえで、単刀直入に無限小の変換を扱うリー代数の導入から始めていくことにする。

## １、線形リー群

n 次元の複素ベクトル空間において、ベクトルを他のベクトルに移す線形演算子 $\hat{T}$ の集合 $\mathbf{G} = \{\hat{T}\}$ が次の性質を満たすとする。

１）恒等演算子 $\hat{E}$ が $\mathbf{G}$ に含まれる。

２）任意の $\mathbf{G}$ に含まれる演算子 $\hat{T}: \mathbf{x}' = \hat{T}\mathbf{x}$ に対して、その逆演算子 $\hat{T}^{-1}: \mathbf{x} = \hat{T}^{-1}\mathbf{x}'$ も $\mathbf{G}$ に含まれる。

$\hat{T}^{-1}$ が存在するための必要十分条件は $\hat{T}$ の表現行列 T の行列式が 0 でないことである。$\det T \neq 0$

３）演算子 $\hat{T}$ と $\hat{T}'$ の積は、$\hat{T}: \mathbf{x}' = \hat{T}\mathbf{x}$ に引き続いて $\hat{T}'$ の変換

$$\mathbf{x}'' = \hat{T}'\mathbf{x}' = \hat{T}'\hat{T}\mathbf{x}$$

を行うものとして定義すると、$\hat{T}'\hat{T}$ もまた 1 つの演算子であり、$\mathbf{G}$ に含まれる。

４）３つの演算子 $\hat{T}, \hat{T}', \hat{T}''$ について結合則

$$\hat{T}''(\hat{T}'\hat{T}) = (\hat{T}''\hat{T}')\hat{T}$$

が成り立つ。

このような線形演算子は群を構成する。もっとも一般的なものは n 次元複素ベクトルの線形変換全体から構成される群で、複素一般線形変換群と呼ばれる。これは、$\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ と表される（**GL** は一般線形変換、$(n, \mathbf{C})$ は n 次元複素ベクトル空間）。この群においては、ベクトルの大きさも方向も変化させる変換が含まれていて、群の各元を指定するパラメーターは連続的な複素数値をとる。

$\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ に幾つかの条件を要求することによって得られる群

（たとえば、ベクトル空間を実ベクトルに限った $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$、$\det|T| = 1$ に制限した $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$ 等。）

| 群の名称 | 記号 | 群の元 | リー代数の元 | 次元 |
|---|---|---|---|---|
| 複素一般 1 次変換群 | $\mathbf{GL}(n,\mathbf{C})$ | 複素正則行列 | 任意の複素行列 | $2n^2$ |
| 複素特殊 1 次変換群 | $\mathbf{SL}(n,\mathbf{C})$ | 行列式が 1 の複素正則行列 | トレースが 0 の複素行列 | $2n^2 - 2$ |
| 実一般 1 次変換群 | $\mathbf{GL}(n,\mathbf{R})$ | 実正則行列 | 任意の実行列 | $n^2$ |
| 実特殊 1 次変換群 | $\mathbf{SL}(n,\mathbf{R})$ | 行列式が 1 の実正則行列 | トレースが 0 の実行列 | $n^2 - 1$ |
| ユニタリ群 | $\mathbf{U}(n)$ | ユニタリ行列 | エルミート行列 | $n^2$ |
| 特殊ユニタリ変換群 | $\mathbf{SU}(n)$ | 行列式が 1 のユニタリ行列 | トレースが 0 のエルミート行列 | $n^2 - 1$ |
| 複素直交群 | $\mathbf{O}(n,\mathbf{C})$ | 複素直交行列 | 複素交代行列 | $n(n-1)$ |
| 直交群 | $\mathbf{O}(n)$ | 実直交行列 | 実交代行列 | $n(n-1)/2$ |
| 特殊直交群（回転群） | $\mathbf{SO}(n)$ | 行列式が 1 の直交行列 | 実交代行列 | $n(n-1)/2$ |
| シンプレクティック群 | $\mathbf{Sp}(2n,\mathbf{R})$ | 2n 次実行列<br>$A^T J A = J$ | 2n 次実交代行列<br>$X^T J + J X = 0$ | $n(2n+1)$ |
| ローレンツ群 | $\mathbf{O}(3,1)$ | 4 次実行列<br>$A^T g A = g$ | 4 次実行列<br>$X^T g + g X = 0$ | 6 |

**GL**、**SL** などの群においてはそれらの作用するベクトル空間においてベクトルの長さが定義されていない。これらはアフィン変換（affine transformation）と呼ばれる。それ以外の群は、ベクトルの長さが定義されている計量ベクトル空間で、その長さは変換によって一定に保たれる。

表に示した群は、一般に線形リー群（linear Lie group）と呼ばれるものである。

連続群の元は無限個あり、それらを連続的なパラメーターを使って区別する。これらのパラメーターの変域が有限な領域であらわされるものをコンパクト群（compact group）、そうでないものをノンコンパクト群（non-compact group）という。表では U(n)、SU(n)、O(n)、SO(n)、$\mathbf{Sp}(2n, \mathbf{R})$ がコンパクト群である。

ノンコンパクト群の元は必ずしも後に見る $e^{i\lambda X}$ の形には書けない。

そこで、これから取り扱うのは主にコンパクト群に限られることになる。

1）コンパクト群の任意の表現は、適当な内積を定義すればその内積を不変に保つユニタリ表現となる。
2）コンパクトリー代数の構造定数 $C^k_{ij}$ は、すべての添え字 i, j, k に対して完全反対称（$C^k_{ij} = -C^j_{ik}$ 等）である。
3）任意のコンパクトリー代数は、単純リー代数と 1 次元リー代数の直和であらわされる。

## 2、無限小変換とリー代数

リー連続群の性質を調べるためには、単位元の近傍（無限小）の性質を探るといった方法をとる。そして、このとき用いられるのがリー代数である。リー代数は、この無限小変換 (infinitesimal transformation) の概念を研究するために導入されたものである。

### リー連続群

①群 **G** の要素 g があるパラメータの連続関数となるものを考える。すなわち

$g(a_1, a_2, \cdots, a_n)$　　　$a_i\ (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \in R$ ( 実数 )

単位元は座標原点にとられ、$e(0, 0, \cdots\cdots, 0)$ とする。

②任意の２つの元の積および任意の元の逆元のパラメーターが、もとの元のパラメーターの解析関数である。
積は滑らかであるとする。

$g(a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot g(b_1, b_2, \cdots, b_n) = g(\phi_1(a, b), \phi_2(a, b), \cdots, \phi_n(a, b))$　　$\phi_i(a, b)$ は、a, b の実解析関数

逆元　$(g^{-1})_i = \psi_i(a_1, \ldots\ldots, a_n)$

このとき、群 **G** はリー群と呼ばれる。また、n を群 **G** の次元と呼ぶ。

### 無限小変換とリー代数

リー群 **G** の要素 g を、単位元 “1” の近傍で考える。ここで、単位元は $g(0, 0, \cdots, 0) = 1$（何も変換しない）である。
このとき、　　（単位元の近傍なので、$a_k \to 0$）

$$g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1 + i\sum_{k=1}^{n} a_k \hat{X}_k + O(a^2)\ ^{※} \qquad i\hat{X}_k \equiv \left(\frac{\partial g}{\partial a_k}\right)_{a=0}$$

とできる。これにより、以下で定義されるリー代数は、リー群の単位元近傍の局所的な性質によって決まることがわかる。また、ここで導入された $\{\hat{X}_k\}$ は、群 **G** の無限小変換を生成する演算子になっている。

※　ランダウ記法は様々な分野で有益であり、たとえば指数関数を 3 次までテイラー展開したものは
$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + O(x^4)$　as　$x \to 0$　と書き表せる。

パラメータ $a_i$ が有限の大きさを持つとすれば、$g = \exp(i\sum_{k=1}^{n} a_k \hat{X}_k)$ となる。

一般に、$\exp(i\hat{X}) \in$ **G** となる元 $\{\hat{X}\}$ の全体をリー群 **G** に対応するリー代数（Lie algebra）$\mathfrak{g}$ と呼ぶ。

$\hat{X} = \sum_{k=1}^{n} a_k \hat{X}_k$　　上で導入された $\{\hat{X}_k\}$ は、リー代数の基底であり、また、リー群の生成子とも呼ばれる。

▶ここからは主要に線形リー群、そのなかでもコンパクト群を念頭に話を進めていくことにする。

議論しやすくするため、リー代数をとりあえず次のように決めておく。
複素正則行列で表現される群 **G** が与えられたとき、そのリー代数 $\mathfrak{g}$ を、任意の実数 t に対してその群の元が $\exp(tX) \in$ **G** となるような行列 X の全体を指すとする。（これはすぐ後に $\exp(-i\,tX)$ の形に定義しなおされる。）

ただし、左辺は $\exp(tX) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n = 1 + tX + \frac{t^2}{2!} X^2 + \cdots\cdots$ で定義されている。

**G** の元 g が微小パラメーター t に対して $g \approx 1 + tX$ であることは、リー代数 X が群 **G** の<u>無限小変換を生成する演算子になっている</u>ことを示している。
また、リー代数 X が与えられたときに、exp(tX) は群 **G** の元になっていなければならないが、そのために次の性

質が要求される。
① X がリー代数ならば、任意の実数 a に対して aX もリー代数に属する。
② X、Y がリー代数ならば、X + Y もリー代数に属する。
③ X、Y がリー代数ならば、$[X, Y] \equiv XY - YX$ もリー代数に属する。　補論 2-1

$[X, Y] \equiv XY - YX$ をリー代数 X と Y の交換子（commutator）または交換関係（commutation relation）という。
交換関係の満たす基本的な式

$[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$

$[aX, Y] = a[X, Y] \qquad a \in \mathbf{C}$

$[X, Y] = -[Y, X]$

$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$　　ヤコビ（Jacobi）の恒等式

構造定数

コンパクト群の議論に便利なように、リー代数を具体的に次のように定義する。
d 個の独立なリー代数 $L_1, L_2, \cdots, L_d$（リー代数の基底）が与えられ、これらが交換関係

$$[L_a, L_b] = i\, C^c{}_{ab}\, L_c \quad (a, b, c = 1, 2, \cdots, d) \qquad (2\text{-}1)$$

を満たすとする。　（2 度現れる添え字 c については $c = 1, 2, \cdots, d$ について和をとるものとする。）
$C^c{}_{ab}$ はこのリー代数の構造定数（structure constants）、d はその次元と呼ばれる。
(2-1) は、１つのリー代数を定義する。

このとき、これに対応するリー群の元 g は、$t^a$ $(a = 1, 2, \cdots, d)$ を実数パラメーターとして

$$g = \exp(-i\, t^a L_a) \qquad (2\text{-}2)$$

（2 度現れる添え字については和をとる。）
で与えられる。$L_a$ をリー群の生成子（generator）という。
(2-2) と先にみた exp(tX) との違いは i を虚数単位として単に tX を $-i\, t^a L_a$ と置き換えただけで本質的な違いはないが、コンパクト群を考える限り、(2-2) のように定義したほうが $L_a$ をエルミート行列にとることができて、物理学への応用上便利である。(コンパクトリー群の表現はユニタリで、リー代数の表現はエルミートとなる。また、コンパクトリー代数の場合、構造定数 $C^c{}_{ab}$ は実数であり、かつ a, b, c について完全反対称となる。)
補論 2-2

構造定数 $C^c{}_{ab}$ は、次の性質を満たす。

$$C^c{}_{ab} = -C^c{}_{ba} \qquad (2\text{-}3:1)$$

$$C^d{}_{ab}\, C^e{}_{cd} + C^d{}_{bc}\, C^e{}_{ad} + C^d{}_{ca}\, C^e{}_{bd} = 0 \qquad (2\text{-}3:2)$$

上の式は、(2-1) の交換関係から直ちに結論される。下の式は、$L_a$、$L_b$、$L_c$ に対するヤコビの恒等式から示される。

---

補論 2-1

③については少し説明を要する。
exp(sX)、exp(tY) は群の要素であるから、次のような特別な積も群の元でなければならない。

$\exp(sX) \cdot \exp(tY) \cdot \exp(-sX) \cdot \exp(-tY) \approx 1 + st(XY - YX) + \cdots$

右辺は群の適当なリー代数 Z が存在して、$\exp(uZ) \approx 1 + uZ + \cdots$ と表わされなければならないから、
$XY - YX \equiv [X, Y] \propto Z$ が必要である。　①

また、①が十分条件となっていることも示す必要がある。
群の２つの元 exp(X) と exp(Y) の積がまた群の元になっていなければならないから、条件①のもとで、$\exp(X) \cdot \exp(Y) = \exp(Z)$ を満たす Z がリー代数の元であることを示さなければならない。
キャンベル - ハウスドルフ（Campbell-Hausdorff）の公式を使うのが便利だろう。
交換関係が定義された代数 X、Y は、次の式を満たす。

$$\exp(X)\bullet\exp(Y)=\exp[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\{Z_m(X,Y)+(-1)^{m-1}Z_m(Y,X)\}] \quad ②$$

ただし、$Z_m(X,Y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{(p_i,q_i)}\frac{(\mathrm{ad}\,X)^{p_1}\bullet(\mathrm{ad}\,Y)^{q_1}\bullet\cdots\cdots\bullet(\mathrm{ad}\,X)^{p_{n-1}}\bullet(\mathrm{ad}\,Y)^{q_{n-1}}}{p_1!\,q_1!\cdots\cdots p_{n-1}!\,q_{n-1}!}X$ ③

$(p_1+q_1)+\cdots\cdots+(p_{n-1}+q_{n-1})=m-1$

$(p_i+q_i)>0 \quad (1\leqq i\leqq n\text{-}1)$

また、$\mathrm{ad}\,X$ は線形演算子 Y に対して、$\mathrm{ad}\,X\bullet Y=[X,Y]$ によって定義されているとする。

この公式を使うと、①の交換関係によって閉じているいくつかの線形演算子 X、Y、Z、…… があったとすれば、$\exp(X)\bullet\exp(Y)$ もまた $\exp(W)$ とあらわせて、W は X、Y、Z、…… 等の線形結合で書きあらわされることがわかる。

なぜなら、③式の各項は、すべて交換子の繰り返しになっているからである。

実際、②式の右辺指数部の最初の数項を書き出してみると、

$W=X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X-Y,[X,Y]]+\cdots\cdots$ となって、①が満たされればこの右辺はリー代数の 1 次結合であらわされる。

### 補論 2-2

コンパクトリー群の表現はユニタリなので、群の元を $U=e^{iX}$ と書くと、ユニタリ条件 $U^\dagger=U^{-1}$ より $X^\dagger=X$ となり、リー代数 X の表現はエルミート行列で表される。

このとき、構造定数は実数となる。実際、ユニタリ表現が存在するとき、リー代数 $X_a$ はエルミートであることに注意すると、

$[X_a,X_b]=\ i\,C^c{}_{ab}\,X_c$

$[X_a,X_b]^\dagger=-\,i\,(C^c{}_{ab})^*\,X_c$

$\quad=[X_b,X_a]=i\,C^c{}_{ba}\,X_c=-\,i\,C^c{}_{ab}\,X_c$

が成立する。

$(C^c{}_{ab})^*=C^c{}_{ab}$

すなわち、構造定数は実である。

このリー代数を随伴表現で行列表示すると、（page5 参照）

$[\mathrm{ad}(X_i)]^k{}_j=-\,i\,C^k{}_{ij}$ 　　j, k が行列成分

両辺のエルミート共軛をとると、左辺はエルミート行列なのでそのまま。また右辺の $C^k{}_{ij}$ 部分は実数であり、j, k を入れ替えてやるのみ。

$[\mathrm{ad}(X_i)]^k{}_j=\ i\,C^j{}_{ik}$

つまり、$C^k{}_{ij}=-\,C^j{}_{ik}$

end

## 3、リー代数の随伴表現

「リー群の表現論」とは、$L_a$ に対応する一般の演算子 $\hat{L}_a$ が、(2-1) と同じ交換関係 $[\hat{L}_a,\hat{L}_b]=i\,C^c{}_{ab}\,\hat{L}_c$ を満たすとして、これを満たす任意次元の $\hat{L}_a$ の行列表現を求めることを目的としている。$\hat{L}_a$ の表現 $D_a$ が求められれば、$g=\exp(-\,i\,t^a D_a)$ (2-2) によって群 **G** の表現が定まる。

ただし、これまで特定の次元 d をもつ行列が (2-1) の交換関係を満たすものとしてみてきたが、同じ構造定数 $C^c{}_{ab}$ をもち、同じ交換関係を満たす行列が d 次元だけとは限らない。一般に無限種類の行列が存在することに注意しながら以下の議論に進んでいこう。

ここでは、リー代数の元 X（一般の演算子 / ハット記号は省いた）を行列で表現することについてみていく。

リー代数の任意の元 X を、正方行列に対応させる写像を σ(X) とする。正方行列の行と列の数は任意とする。

σ(X) が

$\sigma(X+Y) = \sigma(X) + \sigma(Y)$ (3-1 :1)

$\sigma(cX) = c\sigma(X)$ c は任意の実数または複素数 (3-1 :2)

$[\sigma(X),\sigma(Y)] = \sigma([X, Y])$ (3-1 :3)

という 3 つの性質を満足するとき、写像 $\sigma(X)$ をリー代数の表現であると言う。一般に写像 $\sigma(X)$ が上の関係式を満たすとき、$\sigma(X)$ は準同形写像であると言う。

一つの有用な例を挙げてみよう。(2-3 :2) $C^d{}_{ab} C^e{}_{cd} + C^d{}_{bc} C^e{}_{ad} + C^d{}_{ca} C^e{}_{bd} = 0$ を次のように書き替えてみる。

$C^d{}_{ab} C^e{}_{cd} - C^d{}_{cb} C^e{}_{ad} = - C^d{}_{ac} C^e{}_{db}$ (3-2)

ここで $R_a$ ( a=1, …, r ) という行列を、その (b d) 成分が $(R_a)^d{}_b = - i\, C^d{}_{ab}$ となるものとして定義しよう。$R_a$ は r × r の行列である。

この行列を用いて (3-2) を $R_a R_c - R_c R_a = [R_a, R_c] = i\, C^d{}_{ac} R_d$ と書き替えれば分かるように、(3-2) は、行列の交換関係として捉えることができる。すなわち、リー代数から r × r の行列への写像を $\sigma(X_a) = R_a$ と定義すれば、$\sigma(X_a)$ は明らかに (3-1 :1~3) の性質を満足し、$\sigma(X_a)$ はリー代数の表現になっている。この場合、行と列の数 r は、リー代数の次元の数と同じであり、特に随伴表現と呼ぶ。

随伴表現： $[\sigma(X_a)]^d{}_b = - i\, C^d{}_{ab}$

もう少し一般的に随伴表現を扱うこともできる。

X, Z を与えられたリー代数の任意の元として、ad(X)Z という作用を

$ad(X)Z = [X, Z]$

と定義しよう。この作用は明らかに

$ad(X+Y) = ad(X)+ad(Y)$ (3-3 :1)

$ad(cX) = c\, ad(X)$ c は任意の実数または複素数 (3-3 :2)

を満足する。

ここで、ヤコビの恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ を

$[X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] = [[X, Y], Z]$

と書き替える。

これは (3-2) の代替物であり、ad という記号を用いて

$ad(X)ad(Y)Z - ad(Y)ad(X)Z = ad([X, Y])Z$

$[ad(X), ad(Y)] = ad([X, Y])$ (3-3 :3)

と書き直すことができる。

すなわち ad は、リー代数の空間から、リー代数上の作用を表す空間への準同形写像である。(3-3 :1~3) により、ad はリー代数の表現になっている。ad(X) はリー代数の元をリー代数の表現に対応させるのだから、その行列としての大きさはリー代数の次元の数と同じであり、この準同形写像も随伴表現と呼ばれる。

## 4、連結

群 **G** の元 g が (2-2) の $g = \exp(- i\, t^a L_a)$ で与えられると、特定のパラメーターの値 $\mathbf{t}_0 = (t_0^1, t_0^2, \cdots, t_0^d)$ に対応する元 $g(\mathbf{t}_0)$ の近傍の元 $g(\mathbf{t}_0 + \lambda\mathbf{t}) \equiv g(\lambda)$ は、微小パラメーター λ に対し

$g(\mathbf{t}_0 + \lambda\mathbf{t}) - g(\mathbf{t}_0) = (-i\, \mathbf{L}\cdot\lambda\mathbf{t})\, g(\mathbf{t}_0)$

を満たし、したがって、$g(\mathbf{t})$ は次の微分方程式に従う。

$$\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = (-i\, \lambda \mathbf{L}\cdot\mathbf{t})\, g(\mathbf{t}_0)$$

すなわち、$\mathbf{t}_0$ の近傍 $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_0 + \lambda\mathbf{t}$ における群元 g は

$g(\lambda) = \exp(-i\, \lambda \mathbf{L}\cdot\mathbf{t})\, g(\mathbf{t}_0)$ (4-1) 注釈 4-1

と表わされる。

このとき **G** の元 $g(\mathbf{t}_1)$ は、元 $g(\mathbf{t}_0)$ と連結しているといい

$g(\mathbf{t}_1) \sim g(\mathbf{t}_0)$

と表わすことにする。すると、群の元の連結について次の同値関係が成りたつ。

① $g(\mathbf{t}) \sim g(\mathbf{t})$

② $g(\mathbf{t}_1) \sim g(\mathbf{t}_2)$ ならば $g(\mathbf{t}_2) \sim g(\mathbf{t}_1)$

③ $g(\mathbf{t}_1) \sim g(\mathbf{t}_2),\ g(\mathbf{t}_2) \sim g(\mathbf{t}_3)$ ならば $g(\mathbf{t}_1) \sim g(\mathbf{t}_3)$

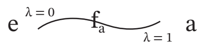
この同値関係によって結びつけられる元の集合を、群 **G** の連結成分という。

次のように書くこともできる。
群を記述するパラメータの空間を考える。この部分空間中の 2 点 A, B がこの部分空間の中で結ばれているとは、$0 \le \lambda \le 1$ で定義され、この部分空間中に値を取る連続関数 $f(\lambda)$ が存在して $f(0) = A,\ f(1) = B$ を満たすことである。A と結ばれる点の全体を連結成分と言う。

群の元は、一般にいくつかの連結成分に分類できる。

群 **G** の連結成分のうちで単位元 e に連結する元の集合を $\mathbf{G}_0$ としよう。このとき $a \in \mathbf{G}_0$ ならば、$\mathbf{G}_0$ 内のある曲線にそって適当な群の関数 $f(\lambda)$ が存在して

$$f_a(\lambda) = \begin{cases} e & (\lambda = 0) \\ a & (\lambda = 1) \end{cases} \qquad (4\text{-}2)$$




$f_a(\lambda)$ によって連結

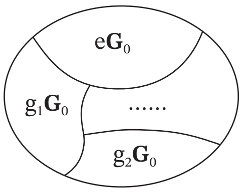
を満たす。$f_a(\lambda)$ は (4-1) の右辺にあらわれる指数関数部分に対応する。

単位元の連結成分 $\mathbf{G}_0$ については次の定理が成りたつ。

**定理**　$\mathbf{G}_0$ は **G** の不変部分群である。　補論 4-1

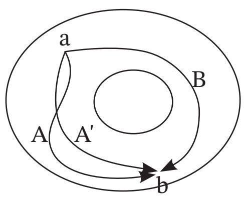
この定理の結果、**G** の元 g に連結な成分を C(g) とすると、$C(g) = g\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_0 g$ となることがわかる。　補論 4-2

これらの結果、一般にリー群は連結成分の和集合で構成され、単位元 e を含む連結な部分群 $\mathbf{G}_0$ に対する剰余類に分割される。（図）




また、$\mathbf{G}_0$ はそれ自身で連結なリー群となっているわけだが、連結なリー群の 2 つの元は曲線で互いに連結することが可能となっている。それらの任意の曲線が連続的な変形によって重ね合わせることができるとき、それを単連結な集合という。

下図のように、単連結でない集合もある（単連結でないパラメーター空間をもつ群の例として回転群 **SO**(3) 等がある)。




単連結でない群
曲線 A と A′ は $\mathbf{G}_0$ の元をたどりながら連続的な変形で重ね合わせることができるが、A と B は不可能である。

群 **G** の元 g とパラメータの連続変化でつながっている部分を連結部分ともいい C(g) と表す。連結部分はその中の一つの元を代表として指定すれば定まるので、$C(g_1)$ と $C(g_2)$ は一致しているか互いに共通元を持たないかのどちらかである。従って、リー群は互いに重なり合わない連結部分の集合からなる。特に、連結部分の任意の 2 点を選んだ時に、その 2 点を結ぶすべての曲線が互いに連続的に移り変わることができるとき（あるいは、一点から出発してその点に戻ってくる任意の道が、連続的に一点に収縮できるとき：参考「ポアンカレ予想」)、**G** は単連結であるという。**GL**(n, **C**), **SL**(n, **C**/**R**), **U**(n), **SU**(n), **SO**(n), **Sp**(2n, **R**) はただ一つの連結部分からなる。このうち、**SL**(n, **C**/**R**), **SU**(n), **Sp**(2n, **R**) は単連結である。

補論 4-1

単位元の連結成分 $\mathbf{G}_0$ については次の定理が成りたつ。

定理　$\mathbf{G}_0$ は $\mathbf{G}$ の不変部分群である。

まず、$\mathbf{G}_0$ が 部分群を構成していることについて。

これには、$\mathbf{H}$ が $\mathbf{G}$ の部分群であるための同値の定義、「$\forall g, \forall h \in \mathbf{H}$ に対して $gh^{-1} \in \mathbf{H}$ ならば、$\mathbf{H}$ は $\mathbf{G}$ の部分群である」を使うとよい。

$\mathbf{G}_0$ の任意の 2 つの元 a, b をとり、それらと単位元 e を結ぶ $\mathbf{G}$ 内の曲線をそれぞれ $f_a(\lambda)$, $f_b(\lambda)$ とすると、$f_a(0) = f_b(0) = e$ でかつ $f_a(1) = a$, $f_b(1) = b$ である。そこで、$h(\lambda) := f_a(\lambda)\, f_b(\lambda)^{-1}$ を定義すると、$h(\lambda)$ もまた $\mathbf{G}$ 内の曲線で、$h(0) = e$, $h(1) = a\,b^{-1}$ である。従って、単位元と連続曲線でつながっている $a\,b^{-1}$ は $\mathbf{G}_0$ の要素なので、$\mathbf{G}_0$ は $\mathbf{G}$ の部分群である。

次に、$\mathbf{G}_0$ が $\mathbf{G}$ の不変部分群であることを示す。これは任意の $g \in \mathbf{G}$ に対して $g\,\mathbf{G}_0\,g^{-1} = \mathbf{G}_0$ が成立することである。$\mathbf{G}$ の任意の元 g と上に導入した曲線 $f_a(\lambda)$ に対して、$\bar{f}_a(\lambda) := g\, f_a(\lambda)\, g^{-1}$ を定義すると、これは連続曲線であり、$\bar{f}_a(0) = e \in \mathbf{G}_0$ なので $\bar{f}_a(1) = g\,a\,g^{-1}$ も $\mathbf{G}_0$ に属する ( $\bar{f}_a(\lambda)$ が連続曲線なので )。よって、$g\,\mathbf{G}_0\,g^{-1} = \mathbf{G}_0$ が成立し、$\mathbf{G}_0$ は $\mathbf{G}$ の不変部分群であることが分かる。　注釈 4-2

補論 4-2

この定理の結果、$\mathbf{G}$ の元 g に連結な成分を C(g) とすると、$C(g) = g\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_0 g$ となることがわかる。

$g\mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_0 g$ は $\mathbf{G}_0$ が不変部分群であることによる。

$\mathbf{G}_0$ の任意の元 a と単位元を結ぶ $\mathbf{G}$ 内の連続曲線 $f_a(\lambda)$ をとり、$h(\lambda) := g f_a(\lambda)$ を定義すると、$h(0) = g$, $h(1) = ga$ なので、ga は g と $\mathbf{G}$ 内で連続的に結ばれている。よって、$g\mathbf{G}_0 \subset C(g)$ である。

逆に、C(g) の任意の元 c と g を連続的に結ぶ曲線 $k(\lambda)$ を選び ( $k(0) = g$, $k(1) = c$ )、$\bar{k}(\lambda) := g^{-1}\, k(\lambda)$ を定義すると $\bar{k}(0) = e$, $\bar{k}(1) = g^{-1} c$ なので、$g^{-1} c \in \mathbf{G}_0$、すなわち、$c \in g\mathbf{G}_0$ となる。従って、$C(g) \subset g\mathbf{G}_0$ 。

以上より、$C(g) = g\mathbf{G}_0$ が示された。　注釈 4-3

end

## 5、普遍被覆群

ここでの最後に、リー代数が与えられたとき、リー群がどのように定まるかという問題について簡単に触れておこう。

定理　$\mathfrak{g}$ を d 次元のリー代数とすると、d 次元の単連結なパラメーター空間をもち、$\mathfrak{g}$ に同型なリー代数をもつリー群 $\mathbf{G}$ は一意的に定まる。

この定理が述べる内容は、リー代数とリー群が 1 対 1 に対応しているということではない。実際、多くの異なるリー群が同一のリー代数をもっている。しかし、「単連結なパラメーター空間」をもつ群は一意的に定まると言っているのである（抽象リー代数には一般にはいくつかの連結した線形リー群が対応しているが、単連結なリー群には一意に対応するということである）。この単連結な群を普遍被覆群 (universal covering group) と呼び、それを記号 $\mathbf{UG}$ で表す。

つまり、抽象リー代数が与えられると、それに対応する単連結な線形リー群が一意に定まり、この単連結な線形リー群を普遍被覆群というのである。

共通なリー代数をもつリー群でも、この普遍被覆群 $\mathbf{UG}$ とはパラメーターの変域が異なり、大域的な構造が異なるリー群が存在し得る（下の例参照）。これらの群は単連結なパラメーター空間にさまざまな制限を付けることによって得られ、群としては普遍被覆群の部分群となっている。

同一のリー代数をもつリー群をすべて探し出す

いま $\mathbf{UG}$ が単連結なリー群で、それが次のような性質を満たす離散的な不変部分群 $\mathbf{D}$ をもつとする。すなわち、

$d_i, d_j \in \mathbf{D}, g_U \in \mathbf{UG}$ に対して $g_U d_i g_U^{-1} = d_j$ とする。このとき群 **UG/D** は、そのリー代数は **UG** のリー代数に同型であるが、**D** が 1 つ以上の元を持つ場合、**UG/D** は多重連結である（**UG** のように単連結でない)。

結局、同一のリー代数をもつリー群をすべて探し出そうとすると、単連結なリー群 **UG** の離散的な不変部分群 **D** をすべて探し尽くせばよいことになる（**UG/D** が探しているリー群になる)。実際、**UG** が連結で **D** が離散的な場合、$g_U$ を単位元 e に近付けたとすれば、$e\, d_i\, e^{-1} = d_j$ となって $d_i = d_j$ 、あるいは **UG** の連結性から $g_U d_i = d_i g_U$ でなければならない（**UG** は連結、**D** は離散的という点が重要)。したがって **UG** のすべての離散不変部分群は **UG の任意の元 $g_U$ と可換な離散群の元 $d_i$ をすべて見つけることで定まる**。この集合を **D** とすると、その部分群も **UG** の離散不変部分群であり、すべての離散不変部分群は **D** の部分群である。　注釈 4-4

行列を用いて定義されるコンパクト群については、この離散不変部分群についてもう少し一般的な結論が引き出せる。いま n 行 n 列の行列で定義されるリー群においては、シューアの補題２（II 章「有限群の表現」page9）によって、$g_U d_i = d_i g_U$ の条件を満たす行列は単位行列の定数倍でなければならない。よって不変部分群 **D** の元は $E_n$ を n 次の恒等行列として $d_i = \lambda_i E_n$　$(d_i \in D)$ と表わすことができ、$\lambda_i$ はいずれかの巡回群の元である。

例　**SU**(2) 群（行列式が 1 の２次元ユニタリ行列）と **SO**(3)（３次元回転群）はリー代数の構造定数が同一であり、単位元近傍の性質は同じである。しかし群の大域的な性質は異なっており、2 対 1 の関係となる（**SU**(2) は単連結なパラメーター領域で表される普遍被覆群であるが、**SO**(3) はそうではない)。この事実はしばしば **SO**(3) = **SU**(2)/**D** と表す。ここで **D** は、群 **SU**(2) の離散的な中心不変部分群（I 章「群論基礎編」page6）である。

**SU**(2) 群の元の一般形は $U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}$ で、行列式が 1 になる条件は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす任意の複素数 α, β によって与えられる。行列式 = 1 の条件を実数で表すと、$\alpha = x_1 + i\, y_1$ , $\beta = x_2 + i\, y_2$ として $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1$ であるから、4 次元球面上のパラメーター領域をもち、単連結な普遍被覆群である。

いま **SU**(2) 群の特定の元 D があって、それが **SU**(2) のすべての元と可換であるとすると、UD = DU でなければならない。

$D = \begin{pmatrix} z & -w^* \\ w & z^* \end{pmatrix}$,　$|z|^2 + |w|^2 = 1$ とおいてみると、

$$\begin{pmatrix} \alpha z - \beta^* w & -\alpha w^* - \beta^* z^* \\ \beta z + \alpha^* w & -\beta w^* + \alpha^* z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z - \beta w^* & -\alpha w^* - \beta^* z^* \\ \alpha w + \beta z^* & -\beta w^* + \alpha^* z^* \end{pmatrix}$$

α, β は $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ のもとで任意であるから、D としては λ を実数として $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

さらに det D = 1 から $\lambda = \pm 1$ 。その結果、$d_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の 2 つの元しか許されないことがわかる。$d_\pm$ は位数 2 の巡回群 $\mathbf{C}_2$ を構成する。この結果、**SU**(2) は **SU**(2)/$\mathbf{C}_2$ の構造をもつ部分群をもつ。

この **SU**(2)/$\mathbf{C}_2$ については、３次元回転群 **SO**(3) に同型である。すなわち、**SO**(3) 群のパラメーター空間は単連結にならない。