Ⅱ、有限群の表現

群 G の各元 g_i に対して、d × d 行列 $D(g_i)$ が存在し、積 $g_i\,g_j = g_k$ に対応して、$D(g_i)D(g_j) = D(g_k)$ が成り立つとき、$D(g_i)$ を群 G の d 次元表現という。

少しめんどうな言い方をすると、1 つの群に対して、これと準同型な 1 次変換群を対応させることを群の 1 次変換群による表現 representation という。ここで 1 次変換とは、次のようなものである。

n 個の変数の組 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ から m 個の変数の組 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ に $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k$ によって移るとき、$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ から $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ への 1 次変換という。これは、行列 (a_{jk}) によって特徴づけられる。

この 1 次変換が、n 次元のベクトル空間の 1 次変換であるとき、この表現を n 次元の表現、そのベクトル空間を表現空間、表現する 1 次変換の行列を表現行列という。　補論 1 参照

群の表現であるための条件

群の元 g_1, g_2 に対応する行列を $D(g_1), D(g_2)$ とすれば、$D(g_1g_2) = D(g_1)D(g_2)$ がなりたたなければならない。

このため、単位元に対応するものは単位行列、逆元に対応するものは逆行列であることがわかる。

$$D(e) = 1\ ,\ \ D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$$

忠実

元 g_i が異なれば $D(g_i)$ も異なるとは限らない。例えば、すべてを単位行列 1 に対応させることもできる。群元と表現行列のあいだの対応関係は、一般に 1 対 1 とは限らず、n 対 1 である。

特別に、 1 対 1 となる場合は、<u>表現が忠実である</u>という。

・単位元だけが単位行列に対応すれば、表現は忠実である。

表現の基底

$\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots, \psi_n$ をベクトル空間の 1 次独立な元とし、群元 $g_i \in G$ がこれらに作用する線形演算子であって、

$$g_i\psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \psi_\mu D_{\mu\nu}(g_i) \qquad g\,(a\psi + b\varphi) = a\,g\psi + b\,g\varphi \uparrow$$

となるとき、$D_{\mu\nu}(g_i)$ がつくる行列の集まりは G の表現行列をなす。　下の例 $\mathbf{C}_{3v}$ を参照するとわかりやすいだろう。

$\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots, \psi_n$ を表現 **D** : $g_i \rightarrow D(g_i)$ の基底という。

・$\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots, \psi_n$ を基底にとったベクトル v_ν は、$\sum D_{\mu\nu}(g_i)\, v_\nu$ となる。　注釈 1

同値な表現

群 G の 2 つの表現 **D** : $g \rightarrow D(g)$、**D'** : $g \rightarrow D'(g)$ の表現行列 D、D' が、正則な行列 T によって同値変換（相似変換 *）$D'(g) = T^{-1}D(g)T$ で結ばれるとき、**D** と **D'** が同値であるという。

（正則行列：$\det T \neq 0$ ／ 逆行列が存在するものをいう。）

*　http://www.yam-web.net/science-note/PM.pdf「物理でつかう数学 / 固有値・固有ベクトル」

・基底を $\psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \psi_\mu T_{\mu\nu}$ のように変換すると、表現行列は $D' = T^{-1}DT$ の同値変換をうける。

補論 1　表現論とベクトル空間　　http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/MP3_14/mp3_note.pdf より　p17 〜

群の操作を定量的に記述するためには、適当な座標系を導入してそれを用いて操作を表現する。具体的には、ベクトル空間 (vector space) を考えて、その中での線形変換として群の操作を表現する。つまり、群の各元の作用は、ベクトルを別なベクトルに変換する線形変換 として表現される。

T が線形変換の演算子である条件は

$$\mathrm{T}(a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y}) = a\,\mathrm{T}\mathbf{x} + b\,\mathrm{T}\mathbf{y} \qquad ①$$

を満足することである。T によって基底ベクトルは

$$\mathrm{T}\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i\,\mathrm{T}_{ik} \qquad ②$$

と 1 次変換される。

任意のベクトル $\mathbf{x}$ は基底ベクトルを用いて $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{a}_i$ と展開できる。

ベクトル $\mathbf{x}$ は T によって次のように変換されることが分かる。

$$\mathbf{x}' \equiv \mathrm{T}\mathbf{x} = \mathrm{T}\sum_k x_k\,\mathbf{a}_k = \sum_k x_k\,\mathrm{T}\mathbf{a}_k = \sum_k x_k \sum_i \mathbf{a}_i\,\mathrm{T}_{ik} =: \sum_i x'_i\,\mathbf{a}_i$$

よって係数ベクトル (x_i) は T によって次のように変換されることが分かる。

$$x'_i = \sum_k \mathrm{T}_{ik}\,x_k \qquad ③$$

これは、基底ベクトル $\{\mathbf{a}_i\}$ という「座標系」を定めることによって、線形演算子 T の n 行 n 列の行列表現 T_{ik} が得られたとみなすことができる。

更に、別な線形演算子 S が

$$\mathrm{S}\mathbf{a}_k = \sum_i \mathbf{a}_i\,\mathrm{S}_{ik}$$

を満足する場合は、S を $x' = \sum_i x'_i\,\mathbf{a}_i$ に作用させて③を用いると

$$\mathbf{x}'' := \mathrm{S}\mathbf{x}' = \sum_{i,k,l} \mathbf{a}_i\,\mathrm{S}_{li}\,\mathrm{T}_{ik}\,x_k$$

となるので

$$x''_l = \sum_{i,k} \mathrm{S}_{li}\,\mathrm{T}_{ik}\,x_k = \sum_k (\mathrm{ST})_{lk}\,x_k$$

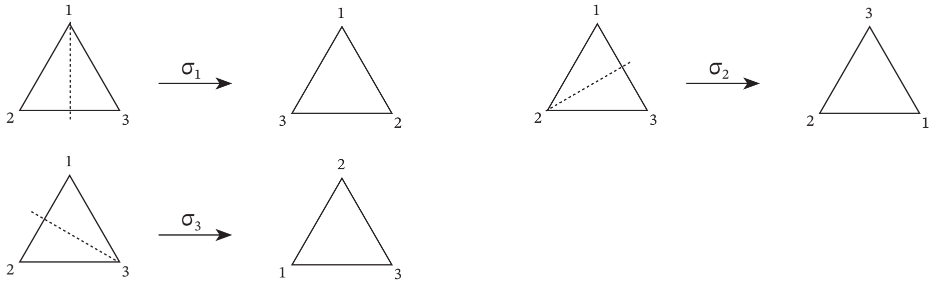
が得られる。

このように、線形演算子の行列表現は結合則を満たす。このような行列のうち、正則な行列のみを考えると逆行列も存在し、かつ、すべての基底ベクトル $\mathbf{a}_i$ を自分自身に移す線形演算子である単位演算子 1 に対する行列表現は単位行列で与えられるので、そのような正則な行列全体の集合は群をなすことが分かる。これを一般線形変換群といい $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ と書く。

群 G から一般線形変換群 $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ の中への準同型写像 D を群 G の（行列）表現という。群 G の元 g ごとに表現 D(g) が対応する。D(g) は n 行 n 列の正則行列で表される線形演算子であり、次の性質を満足する。

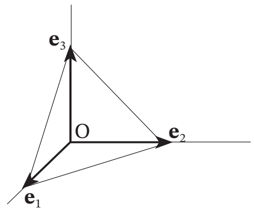
- G の単位元 e には単位行列 $\mathrm{D}(e) = 1$ が対応する。
- G の元 g の逆元 g^{-1} には逆行列が対応する：$\mathrm{D}(g^{-1}) = \mathrm{D}^{-1}(g)$。
- G の 2 つの元 g, g′ の積 g g′ の表現 D(g g′) はそれぞれの表現の積に等しい、すなわち、$\mathrm{D}(g)\mathrm{D}(g') = \mathrm{D}(g\,g')$、これは G から $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ への写像が準同型写像であるという要請の帰結である。

補論 2　表現の例（正三角形の合同変換群 $\mathbf{C}_{3v}$）　http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/GT/GT01.pdf「群論基礎編」参照



この $\mathbf{C}_{3v}$ 変換群を次のように考えてみる。

正３角形を原点 O に起点を置く直交する３つの単位ベクトル ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) の先端で張られたものとする。



$\mathbf{e}_i$ をいずれかの $\mathbf{e}_j$ に移す操作は

$\hat{g}\,\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{e}_j\, D_{ji}(g)$　　ここで、$\hat{g}$ は群の元 g が演算子として $\mathbf{e}_i$ に作用するものとする。

と書くことができる。

例えば、単位元 e は $\hat{e}\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$, $\hat{e}\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, $\hat{e}\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3$ 、c_3 は $\hat{c}_3\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $\hat{c}_3\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, $\hat{c}_3\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ 、……といった具合になる。

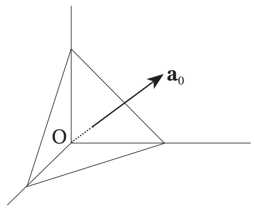
これらを３×３行列 $D_{ji}(g)$ で表すと、

$$D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D(c_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(c_3^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D(\sigma_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad ①$$

となる。これは、１対１の忠実な表現である。

①の操作は、座標の基底ベクトル $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ の入替になっているが、この入替に対して原点から３角形に垂直に交わるベクトル $\mathbf{a}_0 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{3}$ は常に不変に保たれる。



そこで基底を ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) のかわりに、

$$\mathbf{a}_0 = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{3}\ ,\quad \mathbf{a}_1 = (2\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)/\sqrt{6}\ ,\quad \mathbf{a}_2 = (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)/\sqrt{2} \qquad ②$$

にとってみる。

($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) から ($\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$) への変換は行列 T を用いて行われ、

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\,T \qquad T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad ③$$

この新しい座標における表現行列は、$D(g)' = T^{-1} D(g)\,T$ によって次のようになり、６つの表現が同時にブロック状に対角化される。

$$D'(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D'(c_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \qquad D'(c_3^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$D'(\sigma_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad D'(\sigma_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&-s\\0&-s&c\end{pmatrix}\qquad D'(\sigma_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&s\\0&s&-c\end{pmatrix}\qquad ④$$

$s=\cos(2\pi/3)=-1/2\qquad c=\sin(2\pi/3)=\sqrt{3}/2$

ここで、

$$D'(g)=\left(\begin{array}{c:cc}D^{(A_1)}(g)&0&0\\ \hdashline 0&&\\ &D^{(E)}(g)&\\ 0&&\end{array}\right)\qquad ⑤$$

$D^{(A_1)}(g)$ は A_1 表現と呼ばれ、1 行 1 列の恒等表現である。

とおくと、$D^{(E)}(g)$ は 2 行 2 列の忠実な表現で、この E 表現は座標 ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) をどのようにとり直してももはや $D^{(E)}(g)$ のすべてを同時に対角化することはできない。このようにある群の表現が座標のとり方を変えてもこれ以上ブロック状に対角化できない表現を既約表現という。これに対して①の D のような表現を可約表現という。

D が⑤のように既約表現に分解された場合、

$$D=D^{(A_1)}+D^{(E)}\qquad ⑥$$

と書いて、D は $D^{(A_1)}$ と $D^{(E)}$ の直和に分解された、あるいは既約分解されたという。

表現 $D^{(E)}$ は、幾何学的には正 3 角形を平面上に置いて、その中心を通り平面に垂直な軸のまわりに $\pm(2\pi/3)=\pm120°$ 回転する操作と、中心と各々の頂点を通り平面に垂直な面に対する鏡映の操作から構成されている。

ここまでは、群の表現行列を既約な表現に分解するという立場から説明してきたが、これを「表現空間」の立場から眺めることもできる。すなわち、ベクトル ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) で張られる 3 次元空間を、2 次元のベクトル ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$) で張られる空間と、$\mathbf{a}_0$ で張られる 1 次元のベクトル空間に分離すると、この群の作用によってはそれぞれの部分空間はその外にはみ出ない。このような $\mathbf{a}_0$ で張られる空間や、($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$) で張られる空間を、この群による不変部分空間と呼ぶ。

実は、群 $\mathbf{C}_{3v}$ は $D^{(A_1)}$, $D^{(E)}$ のほかにもう 1 つの既約表現をもつ。その表現は $\mathbf{C}_{3v}$ が 3 次の巡回群 $\mathbf{C}_3$ によって因子群 $\boldsymbol{\sigma}$（鏡映群）に分解できることに着目すると構成できる（http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/GT/GT01.pdf 「群論基礎編 /1、群論の基礎 / 剰余類群（商群、因子群）」参照）。

$\mathbf{C}_3$ の各元 { e , c_3 , c_3^2 } に対して恒等表現 D = { 1 , 1 , 1 } をとってみる。鏡映群 $\boldsymbol{\sigma}$ は 2 次の巡回群 $\mathbf{C}_2$ = { e , c_2 } に同型であるから、1 つの忠実な表現 B = { 1 , −1 } を採用したとする。

ここで、$\mathbf{C}_{3v}$ の剰余分解 $\mathbf{C}_{3v}=\mathbf{C}_3+\mathbf{C}_3\,\sigma_1$ を念頭において $\mathbf{C}_{3v}$ = { e , c_3 , c_3^{-1} , σ_1 , σ_2 , σ_3 } に対応して、

$$D^{(A_2)}=\{\,1\,,1\,,1\,,-1\,,-1\,,-1\,\}$$

とすると、これが $\mathbf{C}_{3v}$ の新しい 1 次元表現になっていることがわかる。これは恒等表現とは異なる。

後に（「指標」の節）、$\mathbf{C}_{3v}$ の既約表現はここで示した $D^{(A_1)}$, $D^{(E)}$, $D^{(A_2)}$ のいずれかに同等であることがわかる。

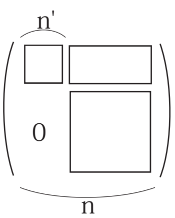
end

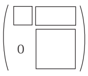
表現の簡約

n 次元のベクトル空間内に n' 次元の部分空間があって、群 G のすべての元（あるいはこれに対応する 1 次変換）に対して不変＝変換してももとの部分空間におさまるとき、この部分空間を群 G に関する不変部分空間という。

http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/GT/GT01.pdf 「群論基礎編 / ３、ベクトル空間」参照 ↑

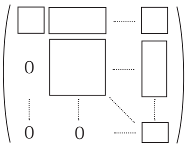
さて、基底のうち、初めの n' 個をその不変部分空間の中から選ぶと、1 次変換の行列は次の形となる。

D(g) =


このように座標系のとり方により、すべての表現行列をこの形にすることができる。このとき、表現は簡約 reduce されたという。すなわち、すべての $D(g)$ が、g に無関係なある正則行列 T によって、$T^{-1}D(g)T$ を  のような形にすることができたとき、表現が簡約されたというのである。（同値変換 page1）

既約 irreducible　　注釈 2

簡約を次々にすすめていって、

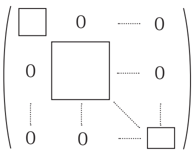
 となったところで、もはやそれ以上簡約できなくなったとき、表現は既約分解されたという（対角ブロックがすべて既約になった）。

いいかえれば、不変部分空間はさらにいくつかの不変部分空間に分解することができて、この分解をすすめていったときに、それ以上分解すると不変性が破れてしまうような不変部分空間を、既約であるというのである。

対角上にならんだ小行列を既約成分という。これだけでも 1 つの群の表現を構成する。既約成分は、同値なものを区別しなければ表現により一意的にきまる。

表現空間の基底を適切に選ぶことで $D(g)$ が同時にブロック状に対角化されるとき、この D を可約表現と言うが、逆にどうやってもこのようなブロック対角化が不可能な場合、その表現を既約表現という。(つまり既約表現 とは、真の閉部分表現を持たない非零表現を指す。)

完約

完約とは、 となったときである。

つまり、完約とは、既約表現の直和（次節参照）で表される場合をいう。

表現空間をいくつかの既約な不変部分空間の直和に分解できるとき、その表現を完全可約表現という。

表現の直和

群 G の 2 つの表現 $\mathbf{D}^{(1)}$、$\mathbf{D}^{(2)}$ の表現行列 $D^{(1)}$、$D^{(2)}$ を使って、

より大きな行列 $D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$　$g \in G$ をつくると、

$D(g)$ の集まりは、やはり、G の表現になっている。

このとき、$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(1)}$ とあらわし、これを $\mathbf{D}^{(1)}$ と $\mathbf{D}^{(1)}$ の直和という。

逆に、G の表現 $\mathbf{D}$ に対してその表現行列が $D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix}$ のように既約表現に分解されたとき、$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(1)}$ と書いて、$\mathbf{D}$ は $\mathbf{D}^{(1)}$ と $\mathbf{D}^{(1)}$ の直和に分解された、あるいは既約分解されたという。

射影演算子と既約表現

注釈 3

射影演算子とは $\hat{P}^2 = \hat{P}$ を満たすエルミート演算子である。

規格化された任意の $|\psi\rangle$ に対して $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ は射影演算子である。幾何学的にいえば、$\hat{P}_\psi$ は $|\psi\rangle$ が張る 1 次元部分空間への射影を与える演算子である。 基底への射影を取り出すので射影演算子と言う。

規格化された 2 つの状態が $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$ を満たせば、$|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ は射影演算子である。$|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ が張る 2 次元部分空間への射影をあたえる。一般に射影演算子 $\hat{P}$ はある部分空間への射影を与える。

一般に、2 つの射影演算子 $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ が $\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{P}_1 = 0$ を満たすとき、互いに直交しているという。このとき、$\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ は射影演算子である。$V_1 \oplus V_2$ への射影である。

・P が射影演算子なら、$\hat{Q} = \hat{1} - \hat{P}$ も射影演算子になる。 直交補空間 $V_\perp$ への射影をあたえる。

$P^2 = P$ なので $(1-P)(1-P) = 1-P$

$P^2 = P \;\rightarrow\; P(1-P) = 0$ 直交

・射影演算子の固有値は 0 または 1 である。

実際、$\hat{P}|p\rangle = p|p\rangle$ であるとすると、$0 = (\hat{P}^2 - \hat{P})|p\rangle = (p^2 - p)|p\rangle$ なので、$p = 0$ または $p = 1$ でなければならない。

▌射影演算子を用いて、一般の表現 D(g) から既約表現 $D(g)^{(\alpha)}$ を取り出す

次の演算子を考える。

$$P^{(\alpha)} = \frac{d_\alpha}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(\alpha)}(g)^\dagger D(g)$$

d_α : 既約表現の次元、|G| : 群の位数（元の個数）　$\chi^{(\alpha)}(g)$: 既約表現の指標 page11

これは既約表現 $D(g)^{(\alpha)}$ への射影演算子となる。$\hat{P}^2 = \hat{P}$ となっている。

$$P^{(\alpha)}P^{(\beta)} = \frac{d_\alpha d_\beta}{|G|^2}\sum_{g,g'\in G}\chi^{(\alpha)}(g)^\dagger\chi^{(\beta)}(g')^\dagger D(g\,g')$$

$$= \frac{d_\alpha d_\beta}{|G|^2}\sum_{g}\Big(\sum_{g'\in G}\chi^{(\alpha)}(g\,g'^{-1})^\dagger\chi^{(\beta)}(g')^\dagger\Big)D(g)$$

g を $g\,g'^{-1}$ と置き換えた。「組み換え定理」による。

$$= \delta_{\alpha\beta}\frac{d_\alpha}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(\alpha)}(g)^\dagger D(g)$$

← 公式 $\sum_{g'\in G}\chi^{(\alpha)}(g'^{-1})\chi^{(\beta)}(g'\,g) = \delta_{\alpha\beta}\frac{|G|}{d_\alpha}\chi^{(\alpha)}(g)$ より

$$= \delta_{\alpha\beta}P^{(\beta)}$$

ここで $D(g) = \sum_{g} n_\alpha D(g)^{(\alpha)}$ と既約表現分解されるとすると、

$$\mathrm{Tr}\,(P^{(\alpha)}) = \frac{d_\alpha}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{(\alpha)}(g)^\dagger\,\mathrm{Tr}D(g) = n_\alpha d_\alpha$$

つまり $P^{(\alpha)}$ は $n_\alpha d_\alpha$ 次元の部分空間への射影になる。既約表現 $D^{(\alpha)}$ は d_α 次元なのでこの部分空間の中に n_α 個含まれていることがわかる。　https://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~matsuo/lect2005/lecture2005.pdf　p30

完全可約の条件

http://cat.phys.s.u-tokyo.ac.jp/lecture/MP3_14/mp3_note.pdf より援用　p20～

表現 D(g) は不変な部分空間 V を持つ場合に可約という。これは任意の $g \in G$ と任意の $\mathbf{v} \in V$ に対して、$D(g)\mathbf{v} \in V$ であることを意味する。部分空間 V への射影演算子を P とすると、<u>表現 D が可約な条件</u>は次のように書ける。

$$P\,D(g)P = D(g)P \quad (\forall g \in \mathbf{G}) \qquad ①$$

可約な表現空間はその群の不変部分空間であるが、元の表現は一般に複数の不変部分空間に分解できる。他方、不変部分空間に分解できない表現は既約であるという。既約、可約の条件は次のようにいうこともできる。$D(g)\mathbf{v}$ を表現空間の基底で展開した時、どんな g に対しても、$D(g)\mathbf{v}$ が基底の真部分集合で展開できる時は可約、すべての基底が必要な場合は既約である。

ベクトル空間の次元を N とし、P がベクトルの最初の n 成分のみ残し、残りの $(N-n)$ 成分を 0 とする射影演算子としよう。この時、群 **G** の表現が可約であるとは $\forall g \in \mathbf{G}$ に対して、**G** の表現が適当な相似変換によって次の形にできることと等価である。

$$\begin{bmatrix} D_1(g) & X(g) \\ 0 & D_2(g) \end{bmatrix} \qquad ②$$

ここで、D_1, D_2, X はそれぞれ $n\times n, (N-n)\times(N-n), n\times(N-n)$ 行列である。② が可約表現の条件 ① を満足していることは直接代入することで確かめることができる *。ある表現が、（相似変換によって）既約表現の直和で表される場合、完全可約であるという。<u>完全可約の条件は ① に加えて</u>

$$(I-P)D(g)(I-P) = D(I-P) \qquad ③$$

が成立することである。このとき ② の X がゼロになり、ブロック対角化される。ただし、ブロック対角化された各ブロックが既約であるとは限らない。一般に、行列表示の場合は、完全可約な表現は既約な行列 D_j でブロック対角化できる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots \\ 0 & D_2(g) & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = D_1(g) \oplus D_1(g) \oplus \cdots \qquad ④$$

---

* 例えば、不変部分空間への射影演算子を $P = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおいて計算してみるとよい。

このとき、$1 - P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{bmatrix}$

有限群の基本定理

有限群の著しい特長は、表現がユニタリ表現に等価であり、かつ完全可約なことである。

▌有限群の表現はユニタリ表現に等価である。　　注釈 4

有限群 **G** の任意の表現 D(g) から次の演算子を定義する。

$$S := \sum_{g \in \mathbf{G}} D(g)^\dagger D(g)$$

S はエルミートでかつ非負（半正定値行列）なので、ユニタリ変換で対角化でき、対角成分は非負である。（正定値行列（半正定値行列）⇔ 固有値が正の実数（非負の実数）。）

$$S = U^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots \\ 0 & d_2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} U \qquad d_j \geq 0$$

実際には d_j はすべて正である。なぜならば、もしある d_j がゼロならば、あるベクトル **v** に対して $S\mathbf{v} = 0$ となる。この時

$$0 = \mathbf{v}^\dagger S \mathbf{v} = \sum_{g \in \mathbf{G}} ||D(g)\mathbf{v}||^2$$

となるので、すべての g に対して $D(g)\mathbf{v} = 0$ でなければならないが、$D(e) = 1$ なので矛盾する。よって、すべての j に対して $d_j > 0$ である。

この場合、S の平方根を

$$X \equiv S^{1/2} := U^{-1} \begin{pmatrix} d_1^{1/2} & 0 & \cdots \\ 0 & d_2^{1/2} & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} U$$

と定義すると、すべての d_j が正なので、その逆 X^{-1} が存在する。それを用いた新しい表現 $D'(g) = XD(g)X^{-1}$ を定義すると、これはユニタリである。実際、$X^\dagger = X$ に注意すると

$$\begin{aligned} D'(g)^\dagger D'(g) &= X^{-1} D(g)^\dagger X^2 D(g) X^{-1} \\ &= X^{-1} D(g)^\dagger \sum_{h \in \mathbf{G}} D(h)^\dagger D(h) D(g) X^{-1} \\ &= X^{-1} \sum_{h \in \mathbf{G}} D(hg)^\dagger D(hg) X^{-1} \\ &= X^{-1} S X^{-1} = 1 \end{aligned}$$

D′(g) と D(g) は相似変換で結ばれているので、両者は等価な表現である。　page1「同値な表現」

それゆえ、D(g) はユニタリ表現に等価である。

▌有限群の表現は完全可約である。　　参考「マシュケの定理」

上の定理により、ユニタリ表現の場合に証明すればよい。

①もし与えられた表現が既約であれば行列全体が一つのブロックを構成しており、完全可約である。

②もし、それが可約の場合は、すべての $g \in \mathbf{G}$ に対して

$$P\,D(g)\,P = D(g)P$$

が成立する射影演算子 P が存在する（射影演算子は $P = |\psi\rangle\langle\psi|$ と書けるのでエルミートである）。両辺のエ

ルミート共役をとると、$P\,D(g)^\dagger\,P = P\,D(g)^\dagger$ 。$D(g)$ はユニタリなので $D(g)^\dagger = D(g)^{-1} = D(g^{-1})$ が成立する。この関係式はすべての g に対して成立するので、g を g^{-1} とおいても成立する。それゆえ、

$$P\,D(g)\,P = P\,D(g)$$

であり、

$$(1 - P)D(g)(1 - P) = D(g)(1 - P)$$

が成立する。これは、$1 - P$ もまた不変部分空間への射影演算子であることが分かり、$D(g)$ はブロック対角化される。

同様な手続きを繰り返すことにより D が完全可約であることが分かる。

シューアの補題

有限群の定理により、「有限群の表現はユニタリ表現に等価」なので、これ以降は基本的にこのユニタリ表現だけを扱うことにする。

シューアの補題１　　注釈５

T が２つの既約表現 $\mathsf{D}: g \rightarrow \mathrm{D}(g)$、$\mathsf{D}': g \rightarrow \mathrm{D}'(g)$ を連結するとき、すなわち、あらゆる g に対して $\mathrm{TD}(g) = \mathrm{D}'(g)\mathrm{T}$ がなりたつとき（ここでの「連結」は、この意味でもちいられている）、T につき次の２つの場合が許される。

１、$\mathrm{T} = 0$

２、T は行列式が０でない正方行列（正則）（このとき逆行列が存在し、D と D' は同値（page1））

すなわち、既約表現がほんとうに連結されるのは、同値な場合に限られ、同値でない既約表現を連結するものは０行列しかなく、もし、同値でない表現が、０行列でない T で連結されるならば、それは既約表現ではないということである。

この定理は次のような形で述べることができる。本質的には同じ内容である。
「群 $\mathbf{G}$ の２つの既約表現を D、D′ とし、それぞれの表現空間を V、V′ とする。V から V′ への１次変換 T がすべての $g \in \mathbf{G}$ に対して $\mathrm{TD}(g) = \mathrm{D}'(g)\mathrm{T}$ をみたすならば、T は V から V′ への同型写像であるか $\mathrm{T} = 0$ である。」

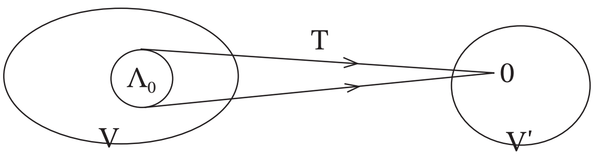
【証明】

それぞれの既約表現 D , D′ が作用するベクトル空間（D , D′ の表現空間）を V（m 次元）, V′（n 次元）とすると、T は V のベクトルを V′ のベクトルに移す（V から V′ への１次変換）n 行 m 列の行列である。

V のベクトル $\mathbf{v}$ で T による写像によって０になるもの、すなわち $\mathrm{T}\mathbf{v} = 0$ となるベクトルの集合を Λ_0 とする（この Λ_0 を T の核と呼ぶ）。Λ_0 に属するベクトル $\mathbf{v}_0$ に対しては、$\mathrm{TD}(g) = \mathrm{D}'(g)\mathrm{T}$ より

$$\mathrm{TD}(g)\mathbf{v}_0 = \mathrm{D}'(g)\mathrm{T}\mathbf{v}_0 = 0$$

となる。これより、$\mathrm{D}(g)\mathbf{v}_0$ も Λ_0 に属する。したがって、Λ_0 は表現 D の既約な不変部分空間（page4）である。したがって、Λ_0 は V であるか、あるいは $\Lambda_0 = 0$ である (仮定により D が既約であることに注意)。



・$\Lambda_0 = \mathrm{V}$ のときは、$\mathrm{TD}\mathbf{v} = 0$ となり、一方すべての g について $\mathrm{D}(g)\mathbf{v} \neq 0$ であるから、$\mathrm{T} = 0$ である。　注釈６

・$\Lambda_0 = 0$ のときは、

T は $\mathrm{T} \neq 0$ であり、かつ単射（単射：１対１写像　ただし、V′ の方が大きいと TV は V′ を埋めつくせない）である。なぜなら、$\mathrm{T}\mathbf{v}_1 = \mathrm{T}\mathbf{v}_2$ を満足する異なる $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2$ が存在すれば、$\mathrm{T}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$、つまり $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \Lambda_0$ となり、Λ_0 が空集合であることに矛盾する。

また、T は全射（TV は V′ を埋めつくす＝上への写像　ただし、V′ の方が小さいと重複する）でもある。実際、任意の $\mathbf{v} \in \mathrm{V}$ に対して $\mathrm{D}'\mathrm{T}\mathbf{v} = \mathrm{TD}\mathbf{v} \in \mathrm{V}'$ なので、V の像 TV は D′ の不変部分空間である。D′ は既約なので $\mathrm{TV} = \mathrm{V}'$ 。

以上より、T は V から V′ への全単射（すべての要素が相互に１対１対応している＝同型写像：１対１の写像で逆写像も存在する）である。

T^{-1} が存在するので $\mathrm{TD}(g) = \mathrm{D}'(g)\mathrm{T}$ は、$\mathrm{TD}(g)\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{D}'(g)$ となり、D と D′ は同値である。

シューアの補題２

既約表現の表現行列と可換な行列は、単位行列の定数倍である。

【証明】

T がすべての D(g) と可換であると、TD(g) = D(g)T

シューアの補題 1 により、T は 0 行列か正則正方行列かである。

① 0 行列のときは、単位行列の 0 倍である。

②正則正方行列のときは、

T の固有値を λ として T′ = T − λE とすると、T′D(g) = D(g)T′ が成りたち、T′ はすべての D(g) と可換である。再び T′ は、0 行列か正則正方行列かである。しかし、λ は固有値なので det(T − λE) = 0 となり、T′ は正則行列ではない。よって、T′ = 0 しかありえない。すなわち、T = λE

ところで、TD = DT という式は、 1 つの T について成りたてば、T の任意の定数倍でも成りたつ。

補題 2 の対偶として

TD(g) = D(g)T をみたす行列 T について、単位行列の定数倍以外のものがあれば、表現 D は可約である。

「シューアの補題」は、既約表現の行列が示す重要な性質を述べたものであり、これを使って次の直交性定理が導かれる。

定理　既約な表現行列の直交性

群 G の既約表現 $D^{(\alpha)}$（異値の既約表現は α のちがった値で示す）の表現行列 $D^{(\alpha)}$ は、次の直交関係をみたす。

$$\sum_g \underline{D_{ij}^{(\alpha)}(g)^*}\, D_{kl}^{(\beta)}(g) = \frac{\eta}{d_\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl}$$

η は G の位数、d_α は表現の次元（同値の場合のみ問題となる）

↑ $D_{ji}^{(\alpha)}(g^{-1})$ としてもよい（ユニタリ）

【証明】

B を d_α 行 d_β 列の任意の行列とし、$M = \sum_g D^{(\alpha)}(g^{-1})\,B\,D^{(\beta)}(g)$ とする（M は d_α 行 d_β 列の行列）。　①

g′ を G の任意の元とし、この式の左から $D^{(\alpha)}(g')$ を掛けると、

$$D^{(\alpha)}(g')\,M = \sum_g D^{(\alpha)}(g')\,D^{(\alpha)}(g^{-1})\,B\,D^{(\beta)}(g)$$
$$= \sum_g D^{(\alpha)}(g'\,g^{-1})\,B\,D^{(\beta)}(g)$$

組み換え定理により $g'\,g^{-1} = g''^{-1}$ となる g″ が存在するから、g についての和を g″ についての和に置き換えて、

$$D^{(\alpha)}(g')\,M = \sum_{g''} D^{(\alpha)}(g''^{-1})\,B\,D^{(\beta)}(g''g') = M\,D^{(\beta)}(g') \quad ②$$

シューアの補題 1 によると、任意の元 g′ について α ≠ β なら M = 0 である。

B は任意であるから、$B_{ik} = 1$ そして他は 0 とすると、①より

$$\sum_g D^{(\alpha)}{}_{ji}(g^{-1})\,D^{(\beta)}{}_{kl}(g) = 0 \quad ③$$

$D^{(\alpha)}$ 等はユニタリ行列としているので、すなわち、α ≠ β のときは定理は成立する。

次に、α = β の場合は、②によって、M はすべての $D^{(\alpha)}(g)$ と可換である。

したがって、シューアの補題 2 によって、$M = \sum_g D^{(\alpha)}(g^{-1})\,B\,D^{(\alpha)}(g) = c\,E$

とくに、$B_{ik} = 1$ そして他は 0 とすると、両辺の (*jl*) 要素をとって

$$\sum_g D^{(\alpha)}{}_{ji}(g^{-1})\,D^{(\alpha)}{}_{kl}(g) = c\,\delta_{jl} \quad ③'$$

c を求めるため、*j* = *l* とおいて *j* について和をとると

右辺 = $c\,d_\alpha$

$$左辺 = \sum_{j=1}^{d_\alpha}\sum_g D^{(\alpha)}{}_{kj}(g)\,D^{(\alpha)}{}_{ji}(g^{-1}) = \sum_{g=1}^{\eta} D^{(\alpha)}{}_{ki}(g\,g^{-1}) = \eta\,\delta_{ki}$$

注釈 7

したがって、$c = (\eta/d_\alpha)\,\delta_{ik}$　これを③′に代入すると証明は完了。

指標

同値な表現を本質的に違わないものと考えるならば、表現を本質的に特徴づけるものとして、$\mathrm{Tr}(D(g))$ を採用することができる。なぜなら、$\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(T^{-1}DT)$ であり、同値な表現について同一の値をもつからである。

↑ $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ より

表現行列の対角和をとり、これを $\chi(g)$ とかく。

$$\chi(g) = \mathrm{Tr}(D(g))$$

① $\chi(g)$ は、同値な表現に対して同じ値をもつし、

②一方、同じ類の元についても $\chi(g_i)$ は同じ値をもつ。

$\boxed{\text{定理}}$　指標の第 1 種直交性

既約表現の指標は、次の直交関係を満足する。

$$\sum_g \chi^{(\alpha)}(g)^* \ \chi^{(\beta)}(g) = \eta\ \delta_{\alpha\beta} \qquad \left(\sum_g \chi^{(\alpha)}(g^{-1})\, \chi^{(\beta)}(g) = \eta\, \delta_{\alpha\beta} \right) \qquad \eta \text{ は } G \text{ の位数}$$

先の「既約表現の直交性定理」において、i = j, k = l として、i, k について和をとればよい。

または、類 ($C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$) でくくって、（指標は、同一の類 C_i に属する元について同じ値をとる）

$$\sum_{i=1}^{n} h_i\ \chi^{(\alpha)}(c_i)^* \ \chi^{(\beta)}(c_i) = \eta\ \delta_{\alpha\beta} \qquad h_i \text{ は類の元の数}$$

$\boxed{\text{定理}}$　指標の第 2 種直交性

既約表現の指標は、次の直交関係をも満足する。

$$\sum_\alpha \chi^{(\alpha)}(c_i)^* \ \chi^{(\alpha)}(c_j) = \frac{\eta}{h_i}\ \delta_{ij} \qquad \text{和は群 } G \text{ の同値でない既約表現すべてについての和}$$

$\boxed{\text{定理}}$　異値の既約表現の個数は、類の個数に等しい。既約表現の数＝共役類の数

同じ同値類に属する任意の 2 つの元は相似変換で結ばれているのでそれらの表現は同値である。また、異なった同値類に属する指標は直交しているので、対応する既約表現も異なっている。

一般に、群の表現を求めても、それは既約表現になっていない。これを既約表現の直和（page5）に分解することが重要となるが、可約な表現 D が、既約表現 $D^{(\alpha)}$ の直和に $D = \sum_\alpha q_\alpha D^{(\alpha)}$ と簡約されるとき、指標については $\chi(g) = \sum_\alpha q_\alpha\, \chi^{(\alpha)}(g)$ が成りたつ。このとき、q_α は指標の第 1 種直交性より、

$$q_\alpha = \frac{1}{\eta} \sum_g \chi^{(\alpha)}(g)^* \ \chi(g) \quad \text{あるいは} \quad q_\alpha = \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^{n} h_i\ \chi^{(\alpha)}(c_i)^* \, \chi(c_i) \text{ となる。}$$

このことから、ある群の既約表現の指標 $\chi^{(\alpha)}$ がわかっていれば、その群の表現 D の中に既約表現 $D^{(\alpha)}$ が何個含まれているか判定できることになる。

正則表現

注釈 8

群 $\mathbf{G} = \{ g_1{=}e, g_2, \cdots, g_n \}$ の任意の元 g に対して、n 行 n 列の行列 $D^{(R)}$ を次のように定義する。

正則表現：$D^{(R)}{}_{ij}(g) \equiv \delta(g_i\, g\, g_j^{-1})$　　①　　$\delta(g)$ はデルタ関数：$g = e$ のとき 1、それ以外は 0

このとき $D^{(R)}(g)$ は群 $\mathbf{G}$ の表現になっている（$D^{(R)}(g)\, D^{(R)}(g') = D^{(R)}(g\, g')$ が示せる）。

$$[D^{(R)}(g)\, D^{(R)}(g')]_{ij} = D^{(R)}{}_{ik}(g)\, D^{(R)}{}_{kj}(g') = \sum_k \delta(g_i\, g\, g_k^{-1})\, \delta(g_k\, g'\, g_j^{-1})$$

右辺が行列要素 (i , j) に対してゼロにならない g_k は、一意的に定まる。なぜなら、ゼロにならないためには、例えば、$g_i\, g\, g_k^{-1} = e$ が必要となる。このとき $g_k = g_i\, g$ であるが、もうひとつの $g_i\, g = g_l$ $(k \neq l)$ があったとすると、積の一意性（組み換え定理）に矛盾することになる。

$g_k\, g'\, g_j^{-1}$ についても同様であり、$g_k\, g'\, g_j^{-1} = e$ とすると $g_k^{-1} = g'\, g_j^{-1}$。

つまり、「右辺が行列要素 (i , j) に対してゼロにならない g_k は、一意的に定まる」ことになる。

このとき、$g_i\, g\, g_k^{-1} = g_k\, g'\, g_j^{-1} = e$　($g_k = g_i\, g$, $g_k^{-1} = g'\, g_j^{-1}$）なので、

$g_i\, g\, g'\, g_j^{-1} = e$　　　これが唯一である

したがって、$[D^{(R)}(g)\, D^{(R)}(g')]_{ij} = [D^{(R)}(g\, g')]_{ij}$

正則表現 $D^{(R)}(g)$ の具体例（正三角形の合同変換群 $\mathbf{C}_{3v}$）

群表の列にそれぞれの元の逆元を並べて積表を作ればよい。

C_{3v}	e	c_3	c_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	c_3	c_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
c_3^{-1}	c_3^{-1}	e	c_3	σ_2	σ_3	σ_1
c_3	c_3	c_3^{-1}	e	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3	e	c_3	c_3^{-1}
σ_2^{-1}	σ_2	σ_3	σ_1	c_3^{-1}	e	c_3
σ_3^{-1}	σ_3	σ_1	σ_2	c_3	c_3^{-1}	e

元 g の正則表現は、この群表を n 行 n 列の行列と考えて、その元 g 現れるところを 1、他を 0 と置いた行列となる。例えば、

$$D^{(R)}(c_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$D^{(R)}(g)$ は行と列がそれぞれ 1 を 1 個だけ含み、他は 0 の行列となる。

--- end

正則表現の指標は、①より、$\chi^{(R)}(g) = \sum_{i=1}^{\eta} \delta(g_i\, g\, g_i^{-1}) = \eta\delta(g)$ 。

よって、$\chi^{(R)}(e) = \eta$, $\chi^{(R)}(\text{else}) = 0$　　②

一方、正則表現は可約であり、正則表現を既約表現に分解したとき、q_α を既約表現 $D^{(\alpha)}$ の縮退数として $D^{(R)}(g) = \sum_\alpha q_\alpha D^{(\alpha)}(g)$ とすると、そのトレースは

$$\chi^{(R)}(g) = \sum_\alpha q_\alpha\, \chi^{(\alpha)}(g) \qquad ③$$

である。

指標の直交性でみた $q_\alpha = \dfrac{1}{\eta} \sum_g \chi^{(\alpha)}(g)^* \chi(g)$ と②より、

$$q_\alpha = \frac{1}{\eta} \sum_g \chi^{(\alpha)}(g)^* \chi^{(R)}(g) = \chi^{(\alpha)}(e) = d_\alpha \qquad ④$$

と書ける。つまり、正則表現 $D^{(R)}$ は既約表現 $D^{(\alpha)}$ をその次数と同じ回数だけ含んでいる。

③に④を代入すると、

$$\chi^{(R)}(g) = \sum_\alpha d_\alpha\, \chi^{(\alpha)}(g) \qquad ⑤$$

g = e とすると次の関係が成り立つ。

$\eta = \sum_{\alpha} d_\alpha^{\ 2}$ ⑥ 既約表現の次数の２乗和が群の位数 η に等しい

$g \neq e$ の場合には、

$\sum_{\alpha} d_\alpha \chi^{(\alpha)}(g) = 0$ ⑦

積表現（直積表現）

群 G の２つの表現 $D^{(\alpha)}$、$D^{(\beta)}$ を考え、その基底をそれぞれ $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{\psi}_{d_\alpha}$ および $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{\phi}_{d_\beta}$ とする。

これらの基底は、群 G の元 g の作用により、

$$g\,\boldsymbol{\psi}_k = \sum_i \boldsymbol{\psi}_i\, D_{ik}^{(\alpha)}(g)$$
$$g\,\boldsymbol{\phi}_l = \sum_j \boldsymbol{\phi}_j\, D_{jl}^{(\beta)}(g) \qquad ①$$

と変換する。

この２組の基底から $d_\alpha d_\beta$ 個の積 $\boldsymbol{\psi}_k\,\boldsymbol{\phi}_l$ をつくると、これは g によって次のように変換する。

$$g\,(\boldsymbol{\psi}_k\,\boldsymbol{\phi}_l) = g\,\boldsymbol{\psi}_k\, g\,\boldsymbol{\phi}_l = \sum_i \sum_j \boldsymbol{\psi}_i\ \boldsymbol{\phi}_j\, [\,D^{(\alpha\times\beta)}(g)\,]_{ij,kl}$$

ただし、$[\,D^{(\alpha\times\beta)}(g)\,]_{ij,kl} = D_{ik}^{(\alpha)}(g)\, D_{jl}^{(\beta)}(g)$ ②

この構造から明らかなように、$\{\boldsymbol{\psi}_k\,\boldsymbol{\phi}_l\}$ をその基底として、②もまた群 G の表現になっている。

実際、②は (j, l) で指定される $d_\alpha d_\beta$ 成分のベクトルを (i, k) で指定される $d_\alpha d_\beta$ 成分のベクトルに移し、さらに

$$D^{(\alpha\times\beta)}(g)\, D^{(\alpha\times\beta)}(g') = D^{(\alpha\times\beta)}(g\,g')$$

を満たす。

この表現を $D^{(\alpha)} \times D^{(\beta)}$ と書き、積表現または直積表現とよぶ。

積表現 $D^{(\alpha)} \times D^{(\beta)}$ の指標 $\chi^{(\alpha\times\beta)}$ は、$\chi^{(\alpha\times\beta)}(g) = \chi^{(\alpha)}(g)\,\chi^{(\beta)}(g)$ となる。 ③

$D^{(\alpha)}$、$D^{(\beta)}$ が既約であっても、$D^{(\alpha)}\times D^{(\beta)}$ は一般に可約である。

これを簡約（既約分解）して、$D^{(\alpha)} \times D^{(\beta)} = \sum_{\gamma} q_\gamma D^{(\gamma)}$ となったとすると、 ④

$$q_\gamma = \frac{1}{\eta} \sum_g \chi^{(\gamma)}(g)^*\ \chi^{(\alpha\times\beta)}(g) = \frac{1}{\eta} \sum_g \chi^{(\gamma)}(g)^*\,\chi^{(\alpha)}(g)\,\chi^{(\beta)}(g) \quad \text{(page11)} \qquad ⑤$$

として q_γ を知ることができる。　η は群 G の位数

クレプシュ - ゴルダン係数

④の $q_\gamma \neq 0$ の場合は、積表現の基底 $\{\psi_k\phi_l\}$ の適当な 1 次結合を用いて合成して得られた既約表現 $\mathbf{D}^{(\gamma)}$ の基底が作られるはずである。この基底ベクトルを

$$\boldsymbol{\varphi}_m^{(\gamma,\,p)} = \sum_{k,\,l} \psi_k\phi_l <\alpha, k\,; \beta, l \mid \gamma, p, m> \qquad ⑥$$

p は④の係数 q_γ が２以上の場合、同一の既約表現 γ を区別するための添え字である。

と表したとき、その係数 $<\alpha, k\,; \beta, l \mid \gamma, p, m>$ をクレプシュ - ゴルダン係数という。このように、クレプシュ - ゴルダン係数は積表現を既約表現の直和に分解する際の基底変換に係る係数として現れる（例えば、合成角運動量の基底変換に係る係数　http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/GT/GT04.pdf「4、角運動量の合成とクレプシュ - ゴルダン係数」参照)。

⑥ の逆変換（積表現の基底 $\{\psi_k\phi_l\}$ を合成して得られた基底 $\{\boldsymbol{\varphi}_m\}$ で表わす）は次の式で与えられる。

$$\psi_k\phi_l = \sum_{\gamma_p,\,m} \boldsymbol{\varphi}_m^{(\gamma_p)} <\gamma, p, m \mid \alpha, k\,; \beta, l> \qquad ⑦$$ 注釈 9

この $<\gamma, p, m \mid \alpha, k\,; \beta, l>$ も同じくクレプシュ - ゴルダン係数と呼ばれる。

⑦は⑥を逆に解いたものであるから、2 組の係数は互いに逆行列の関係になる。

$$\sum_{m,\gamma,p} <\alpha, k ; \beta, l \mid \gamma, p, m><\gamma, p, m \mid \alpha, i ; \beta, j> = \delta_{ki}\,\delta_{lj}$$

$$\sum_{k,l} <\gamma, p, m \mid \alpha, k ; \beta, l><\alpha, k ; \beta, l \mid \gamma', p', m'> = \delta_{(\gamma,p)(\gamma',p')}\,\delta_{mm'}$$

直積群の表現

直積群は http://www.yam-web.net/blog/wp-content/uploads/science/GT/GT01.pdf「群論基礎編」page8 参照

D_a を群 A の d_a 次元表現、D_b を群 B の d_b 次元表現とし、a、b をそれぞれ群 A、B の任意の元とする。

直積群 A × B の元 ab に対して、行列 D(ab) を $[\,D(ab)\,]_{ij,kl} = D_{ik}(a)D_{jl}(b)$ によって定義すると、

行列 D(ab) の集まりは、群 A × B の表現になっている。

$D_{a\times b}$ の次元は $d_a d_b$ である。

その指標は、次のようになる。

$\chi_{a\times b}(ab) = \chi_a(a)\ \chi_b(b)$

部分群の表現

H を G の部分群とする。G の表現 D の表現行列 D(g) は、G のすべての元 g について定義されている。このうち部分群 H の元 h に対応する表現行列 D(h) だけを取りだすと、その集まりは部分群 H の表現になっている。

この表現を D↓H と書き、表現 D を H へ制限して得られた表現という。

D が群 G の既約表現であっても、これを部分群 H の表現としてみた D↓H は一般に可約である。