Ⅰ　群

1、群論の基礎

群の定義

$g_1, g_2, \cdots\cdots, g_n$ が集合 G の元であって、任意の２つの元 g_i, g_j のあいだに積と名付ける演算◦が定義されており、次の４つの公理が満たされているとする。（この演算◦は省かれて $g_i \circ g_j \;\rightarrow\; g_i\,g_j$ と書かれることが多い。）

１、G は積に関して閉じている。　$g_i \circ g_j \in G$

２、結合律　$g_k \circ (g_i \circ g_j) = (g_k \circ g_i) \circ g_j$

３、単位元　任意の元 g に対して $e \circ g = g \circ e = g$ となるような元 e が G の中に存在する。

４、逆元　　任意の $g \in G$ に対し、ある $x \in G$ が存在して、$g \circ x = x \circ g = e$ となる。

集合 G が以上の条件を満たすとき、「G はこの演算◦に関して群である」という。

・群元の個数を群の位数という。群の位数が有限である群を有限群といい、位数が有限でない群を無限群という。

・一般に積に関しては交換律は成りたたないが（非可換）、任意の２つの元 g_i, g_j について交換律 $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ が成りたつとき、G を可換群（アーベル群）という。

・任意の元 c に対して $c^n = e$ なる n が存在し、これを位数 n の元という。（「群の位数」と「元の位数」の違いに注意）
$c^n = e$ となる最小の正の整数 n を元 c の位数 というが、そのような正の整数が存在しないときは、元 c の位数は∞ と約束する。

・位数 n の元 c のベキ乗からつくられる集合は群をつくり、これを n 位の巡回群（可換群でもある）という。

$C_n = \{c, c^2, c^3, \cdots\cdots, c^n = e\}$

$c \sim c^6$ までは等しいものがあらわれず、c^7 で $c^7 = c^3$ になったとすると $c^6 = c^2$ であり矛盾。これが矛盾しないためには、$c^7 = c$ とループをつくる必要があり、このとき $c^6 = e$ となる。

・巡回群の場合は、c の積の形ですべての群元が与えられた。このようにすべての群元が少数の独立な元の積の形であらわせるとき、それら少数個の元を群の生成元と呼ぶ。生成元の選び方は一意的ではない。

若干の定理

有限巡回群では、群の位数と元の位数が一致する。

有限群 G の元 c の位数は、G の位数の約数になる。

群の位数が素数ならば、その群は巡回群である。

空間の対称性に関する群

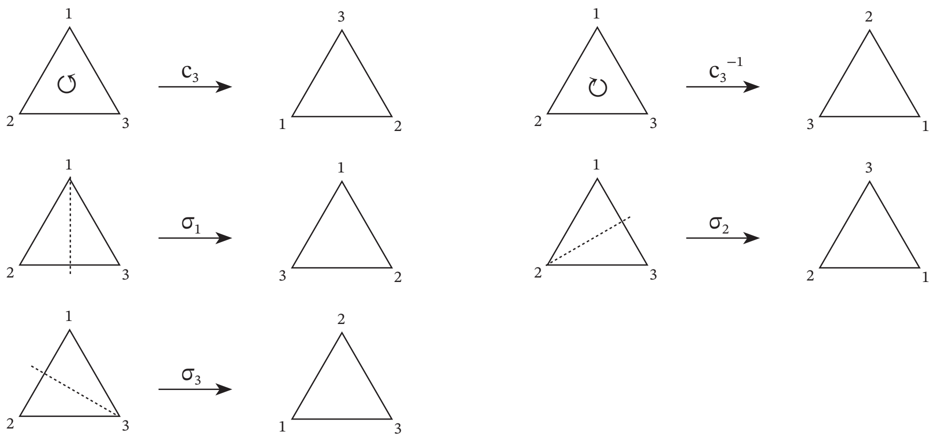
群論を始めるにあたって、その入口の定番となっているのが「空間の対称性」である。

以下の３つの操作は、空間の対称性（変換をおこなっても形が変わらない＝もとのものに重ね合わすことができる）を考える上で基本的な要素となっているが、それぞれ群を構成していることがすぐわかる。

σ 鏡映変換	$\sigma^2 = e$　e は単位元	
c_n 回転変換	$2\pi/n$ 回転	$c_n{}^n = e$
t_a 平行移動	結晶構造など	

一般に空間の対称性はいくらでも複雑なものを考えることができるが、実際上は、上の鏡映、回転、平行移動の組み合わせに対する不変性で記述し尽くす。これら３つの組み合わせで構成される群を**空間群**と呼ぶ。なかでも、平行移動を含まない群は**点群**と呼ばれる（点群の操作において物体の１点は常に固定しておくことができる）。

正三角形の合同変換群 $\mathbf{C}_{3v}$ を取り上げてみると、$\mathbf{C}_{3v} = \{\, e, c_3, c_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \,\}$ となる。



$\mathbf{C}_{3v}$ の群の積表（群表ともいう）元 a と元 b の積 ba を表にしたもの：群の性質を調べるのに役立つ

$b \backslash a$	e	c_3	c_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	c_3	c_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
c_3	c_3	c_3^{-1}	e	σ_3	σ_1	σ_2
c_3^{-1}	c_3^{-1}	e	c_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	c_3	c_3^{-1}
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	c_3^{-1}	e	c_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	c_3	c_3^{-1}	e

加群

可換群においては、交換律を含めた５つの公理が成りたち、◦を用いるかわりに＋を用いて、次のようにあらわす。

１、$a_i + a_j \in A$

２、$a_k + (a_i + a_j) = (a_k + a_i) + a_j$

３、$0 + a = a + 0 = a$　　零元の存在（これが単位元）

４、$(-a) + a = a + (-a) = 0$　　逆元の存在

５、$a_i + a_j = a_j + a_i$

体

実数全体の集合 R は、ふつうの意味の和に関して加群をつくっているが、積については０の逆元がつくれないから（０に何をかけても単位元１にならない）群をつくっていない。しかし、この０をのぞけば、積についても可換群をつくる。さらに、和と積の交りあった演算に対して両分配律

$a_k(a_i + a_j) = a_ka_i + a_ka_j$ がみたされている。

このような集合 R を一般に体とよぶ。

複素数の集合 C も同様に体をつくる。

環

１つの集合の元の間に、２種類の算法が定義されており、一方について結合系、他方について可換群をなすとする。この２つの算法をそれぞれ乗法、加法と名付け、結合結果を積、和の形であらわすとき、その間に

$(a + b)c = ac + bc$,　$c(a + b) = ca + cb$　　分配律

が成りたつならば、この集合は環（ring）をなすという。

環の加法に関する単位元は零元とよび、０であらわす。

$a0 = 0a = 0$　　← $a0 + ab = a(0 + b) = ab$ より $a0 = 0$

が成りたつ。

環は、乗法に関しては群をつくる必要はない。実際、２つ以上の元があれば群をつくることはできない。(0 元のみの集合のときだけ)
0 元以外の元が乗法について群をつくることはある。このとき集合は体（field）をつくるという。

組み換え定理

位数 n の群 $G = \{g_1, g_2, \cdots\cdots, g_n\}$ が与えられたとき、G の任意元 g を各元に掛けて得られる集合 $\{g_1g, g_2g, \cdots\cdots, g_ng\}$ には、G の元が 1 度、それもただ 1 度だけあらわれる（2 度現れることはない)。= G と一致
左から g を掛けても同じ。

$\because$ $g_ig = g_jg$ とすると、g^{-1} を両辺にかけることにより $g_i = g_j$

同型

２つの群 G と G' があって、G の元 g_i と G' の元 g_i' に 1 対 1 の対応があり、G の積 $g_ig_j = g_k$ に対して、G' の積 $g_i'g_j' = g_k'$ が成り立つとき、すなわち群の積表が一致するとき、G と G' は同型であるという。
$G \cong G'$ と書く。

同型な群は、同じ構造の群表をもつ。

	g_1	$\cdots$	g_j	$\cdots\cdots$	g_n
g_1			$\vdots$		
$\vdots$					
g_i	$\cdots\cdots$		$g_i\,g_j$		
$\vdots$					
g_n					

組み換え定理により、それぞれの行、列には G の元がすべて再現される。

準同型

上の 1 対 1 の対応を、n 対 1 の対応に拡張したもの。
２つの群 G と G' があって、G の各元 g に対して G' の元 g' が、G から G' への写像 f によって対応づけられているとする。
このとき、$g_i, g_j \in G$ に対して、$f(g_i)f(g_j) = f(g_ig_j)$ が成り立つとき、f は準同型写像であるという。
準同型写像で結ばれる２つの群 G と G' は準同型であるという。
$G \sim G'$ であらわす。
準同型では「積を取ってから写したものと，写してから積を取ったものが等しい」と言っているので、ある意味、群の準同型とは、群の構造を保つ写像といえる。

・$f(e) = e'$　　準同型写像 f は、G の単位元を G' の単位元に写す。
・$f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$　　準同型写像によって 逆元は逆元に移される

写像 $f : G \to G'$ において、集合 G' の任意の元 g' に対して、$f(g) = g'$ となるような元 g が集合 G にあるとき、f を G から G' の上への写像という。

準同型の例

先にみた正三角形の合同変換群 $\mathbf{C}_{3v} = \{ e , c_3 , c_3^{-1} , \sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 \}$ と巡回群 $\mathbf{C}_2 = \{ e , c_2 \}$ の間に 3 対 1 写像

$$e , c_3 , c_3^{-1} \xrightarrow{f} e$$

$$\sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 \xrightarrow{f} c_2$$

を行ったとすると、$\mathbf{C}_{3v}$ の群表により $\mathbf{C}_{3v}$ と $\mathbf{C}_2$ は準同型である。

共役元

$a \in G$ とする。

この a を同じ群の元 $g \in G$ によって、$b = gag^{-1}$ のように変形したとき、この b を a に共役な元とよぶ。

① b が a に共役なら、a も b に共役である。（同値律）

② a と b が共役で、b と c が共役なら、a と c も共役である。（推移則）

共役であるという関係は、同値律を満たすので、a と b は互いに共役 conjugate であるという。

共役類（類）

a に共役な元の集合を、a の共役類 conjugate glass または類とよぶ。

群 G の元は、互いに共役な元ごとに集めて類別できる。

$G = \sum_i C_i$　　類 C_i は群ではないので注意

例　$\mathbf{C}_{3v}$ は次のように類別される。　　　群の元を類別する方法については、補論 1-1 page17 参照

$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_3$
e	$c_3 ,\ c_3^{-1}$	$\sigma_1 ,\ \sigma_2 ,\ \sigma_3$

類は、その中の 1 個の元を代表として指定すれば定まる。

1 つの類に属する元は、系列 $a(g_1=e)$，$g_2ag_2^{-1}$，……，$g_nag_n^{-1}$ で与えられるが、ただし、この中には同じ元が重複してあらわれる。

・同じ類に属する元の位数は等しい。

$\because a^n = e,\ gag^{-1} = b$ とすると、$b^n = ga^ng^{-1} = e$

・可換群の元は、どれもそれ自身単独でそれぞれ別個の類をつくる。

$\because gag^{-1} = gg^{-1}a = a$

類 C_k に属する各元を任意の群元で変形したものの集合 gC_kg^{-1} は、C_k それ自身に等しいから $gC_kg^{-1} = C_k$（C_k は群 G の任意の元 g と可換 $gC_k = C_kg$）。

これより、いくつかの類を寄せ集めた集合 $C = \sum_k a_kC_k$（a_k は正整数または 0）もまた、任意の群元 g に対して $gCg^{-1} = C$ をみたす。

逆に、群元の集合 C が、任意の g について $gCg^{-1} = C$ をみたすなら、$C = \sum_k a_kC_k$ とあらわすことができる。

類の積

類の積 C_iC_j を、それぞれの類に属する元の積がつくる集合と定義する。

この集合の中には同一の元が重複してあらわれることがあり、その場合にはそれらを独立なものとして数える。すると、類同士の積には、いくつかの類が束になってあらわれてきて、一般に次のようにあらわせる。

$C_iC_j = \sum_k c_{ij}{}^kC_k$　　$c_{ij}{}^k$ は 0 または正整数

$\because gC_iC_jg^{-1} = gC_ig^{-1}gC_jg^{-1} = C_iC_j$

これより、C_iC_j は C_k の寄せ集めとしてあらわれる。（上節の最後の行文）

例

$\mathbf{C}_{3v}$ についての類の積表

	$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_3$
$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_3$
$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_2$	$2\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2$	$2\mathbf{C}_3$
$\mathbf{C}_3$	$\mathbf{C}_3$	$2\mathbf{C}_3$	$3\mathbf{C}_1+3\mathbf{C}_2$

$c_{ij}{}^k$ に関する性質（上の $\mathbf{C}_{3v}$ についての類の積表参照）

① $C_iC_j = C_jC_i$（可換）　$\because$ $gC_i = C_ig$ において g を C_i の元に選べばよい。

この可換性により、$c_{ij}{}^k = c_{ji}{}^k$

② C_i の任意の元 a の逆元 a^{-1} が属する類を C_i' とするとき、積 C_iC_j における単位元のみからなる類 C_1 の係数は、

$c_{ij}{}^1 = n_i$　（$C_j = C_i'$ のとき）　（上の $\mathbf{C}_{3v}$ についての類の積表では C_1 の係数に注目→ C_i に属する元の個数）

$= 0$　（それ以外のとき）

ただし、C_1 は単位元だけからなる類、n_i は C_i に属する元の個数

$\because$ a が C_i の元で a^{-1} が C_i' の元ならば、C_i の元は gag^{-1} $(g \in G)$ で構成され、C_i' は $ga^{-1}g^{-1}$ で構成される。C_i' の元はすべて C_i の逆元で構成され、元の数 n_i も等しい。

したがって、$C_j = C_i'$ のとき $c_{ij}{}^1 = n_i$ 。$C_j \neq C_i'$ のときは、C_j が C_i の元の逆元を含まないから、単位元を含む類 C_1 は $C_iC_j = \sum_k c_{ij}{}^kC_k$ の右辺には現れない。すなわち $c_{ij}{}^1 = 0$ である。

部分群 subgroup

群 G の部分集合 H が、G において定義された積に関して群となっているとき、H を G の部分群という。

単位元 e だけの集合と G 自身は、常に G の部分群であるが、これら以外の部分群を真部分群という。

群 G の空でない部分集合 H が、部分群であるための必要十分条件は、

1、$h_i, h_j \in H \Rightarrow h_ih_j \in H$

2、$h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$

が成りたつことである。

例

正三角形の合同変換群 $\mathbf{C}_{3v} = \{ e, c_3, c_3{}^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \}$ では、巡回群 $\mathbf{C}_3 = \{ e, c_3, c_3{}^{-1} \}$, $\mathbf{C}_2 = \{ e, \sigma_1 \}, \{ e, \sigma_2 \}, \{ e, \sigma_3 \}$ などが部分群となる。

共役部分群

H を G の部分群とする。

G の一つの元 g によって得られる集合 gHg^{-1} を考えると、これもやはり G の部分群である。

これを H の共役部分群とよぶ。

実際、$h_1 h_2 = h_3$ ならば、$g h_1 g^{-1} \circ g h_2 g^{-1} = g h_1 h_2 g^{-1} = g h_3 g^{-1}$

不変部分群（正規部分群 normal subgroup）

とくに、任意のに g 対して、$gNg^{-1} = N$ となるような部分群 N を G の不変部分群または正規部分群という。

$gNg^{-1} = N$ をみたす集合は、類の和でなければならないから（「共役類（類）」節の最後の行文)、不変部分群とは、G の部分群でしかも類の和になっているものである。

中心

群 G のすべての元と交換する元のことを中心元と呼び、すべての中心元の集合を中心と言う。中心元の集合は不変部分群であり、そのような不変部分群のことを中心不変部分群と呼ぶ。

剰余類

H を G の部分群とする。

G の中から H には属さない元 g_1 を 1 つ選んで Hg_1 を作る。すると、H と Hg_1 とは共通元をもたない。

この g_1 は Hg_1 の中のどれか別のものと置き換えても同じ。$g = h_k g_1$ とすると、$Hg_1 = Hh_k^{-1}g = Hg$
つまり、g が Hg_1 に含まれれば、Hg_1 と Hg は一致する。逆に、g を Hg_1 に含まれない元とすれば、Hg_1 と Hg は共通元を含まない。

つづけて、H にも Hg_1 にも属さない元 g_2 を選んで Hg_2 を作る。Hg_2 の元は、H にも Hg_1 にも属さない。

これを続けていくと、G は次のように分解される。

$$G = H + Hg_1 + Hg_2 + \cdots\cdots + Hg_n$$

H の位数は、G の位数の<u>約数でなければならない</u>ことがわかる。

これを、H の右剰余類による類別とよぶ。

左剰余類も同様。

・群 G の位数が素数のものは、真部分群をもたない。位数が素数である群は、巡回群に限られる。

・不変部分群（正規部分群）に関しては、左右剰余類は一致する。

例

正三角形の合同変換群 $\mathbf{C}_{3v} = \{ e, c_3, c_3^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \}$ に対して、H として $\mathbf{C}_2 = \{ e, \sigma_1 \}$ を採用すると、

$$\mathbf{C}_{3v} = H + H\sigma_2 + H\sigma_3$$

H として $\mathbf{C}_3 = \{ e, c_3, c_3^{-1} \}$ を採用すると、

$\mathbf{C}_{3v} = H + H\sigma_1$　　σ_1 のかわりに σ_2, σ_3 でもよい。

剰余類群（商群、因子群）

群が不変部分群（正規部分群）を持つときは、群をより簡単な群の性質に帰着させて、その性質を調べることができる。

N が群 G の不変部分群であるとする。

G を N によって剰余類に分解したとする。

$G = Ng_1 + Ng_2 + Ng_3 + \cdots\cdots + Ng_m$　　$g_1 = e$　単位元

$(Ng_i)(Ng_j) = Ng_ig_j$ が成り立つ。

剰余類 Ng_i と Ng_j に属する任意の元を 1 つずつ選んでその積をとる。

$(n_lg_i)(n_mg_j) = n_l(g_in_mg_i^{-1})g_ig_j$

N は不変部分群だから、$g_in_mg_i^{-1} \in N$

したがって適当な N の元 n_k をとって、$(n_l g_i)(n_m g_j) = n_k g_i g_j$ とあらわせる。

つまり、Ng_i と Ng_j の積は剰余類 Ng_ig_j に属する。　注釈 1-1

これは、N による剰余類の集合が群をつくることを意味する。

このような群を剰余類群または商群、因子群と呼び、G/N とあらわす。この群の算法としては、２つの類について各々から１つずつとった元の積全部のつくる集合を２つの類の積とする。
この単位元は、N 自身である。Ng_i の逆元は、Ng_i^{-1} 。

例
$\mathbf{C}_{3v} = \{ e , c_3 , c_3^{-1} , \sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 \}$ をその不変部分群 $\mathbf{C}_3$ によって分解すると、

$\mathbf{C}_{3v} = \mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_3\,\sigma_1$

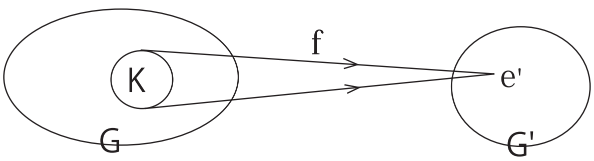
おのおのの剰余類は、$\mathbf{C}_3 = \{ e , c_3 , c_3^{-1} \}$ ，$\mathbf{C}_3\,\sigma_1 = \{ \sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 \}$ であるから、剰余類群の積表は次のようになる。これは群としては、位数が 2 の巡回群と同型である。

	$\mathbf{C}_3$	$\mathbf{C}_3\,\sigma_1$
$\mathbf{C}_3$	$\mathbf{C}_3$	$\mathbf{C}_3\,\sigma_1$
$\mathbf{C}_3\,\sigma_1$	$\mathbf{C}_3\,\sigma_1$	$\mathbf{C}_3$

G から剰余類群 G/N 上への写像 $f : G \to G/N$ を、$f(g_i) = Ng_i$ によって定義すれば、$f(g_i)f(g_j) = f(g_ig_j)$ とあらわすことができる。したがって、f は準同型写像であり、$G \sim G/N$ である。

核

G から G' への準同型写像 $f : G \to G'$ によって、G' の単位元 e' に写像されるような G の元の集合 K を、写像 f の核とよぶ。



準同型写像 f の核 K は、群 G の不変部分群（正規部分群）である。

$f(gKg^{-1}) = f(g)f(K)f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = f(gg^{-1}) = e'$

すなわち、$gKg^{-1} = K$

準同型定理

準同型な２つの群 G、G' を結ぶ準同型写像を $f : G \to G'$ とし、その核を K とする。

K は G の不変部分群（正規部分群）だから、剰余類群 G/K ができる。

G/K から G' への写像 $\bar{f}$ を $\bar{f}\,(Kg_i) = f(g_i)$ によって定義すると、$\bar{f}$ は同型写像である。

すなわち、$G/K \cong G'$　　補論 1-2　page17 参照

$G \sim G' \xrightarrow{\text{核}K} G/K \cong G'$

直積群

群 G、G' があって、２つの元 $g_i \in G$、$g_a' \in G'$ を取り出して、組 $(g_i g_a')$ をつくる。

$(g_i g_a')$ を g_i と g_a' の積とみて、$g_i g_a' = g_a' g_i$（可換）が成り立つとき、この組の集合は、群をつくることが示される。

これを G と G' の直積群とよび、$G \times G'$ で表す。

群 G、G' の位数をそれぞれ m と n とする。$g_i \in G$、$g_a' \in G'$ として、$g_i g_a' = g_a' g_i$（可換）が成り立つとき、この積 $g_i g_a'$ は位数 mn の群を作る。実際、群 G、G' において $g_i g_j = g_k$、$g_a' g_b' = g_c'$ となるとき、$g_i g_a' \circ g_j g_b' = g_k g_c'$ となる。

補足

有限個の元から生成される可換群は、いくつかの巡回群の直積としてあらわせる。

これは、群論の有名な定理の１つ「有限生成アーベル群の基本定理」というものであり、群 G が有限生成アーベル群であれば、G は巡回群の直積に分解できると主張するものである。

2、対称群（置換群）

n 個の席を置換する集合を、n 次の対称群または置換群とよび、S_n であらわす。

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots\cdots & p_n \end{pmatrix}$　　たとえば、$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

n 個のものを n 個の席に配置する方法は n! 通りある。

例として、3 次対称群 $\mathbf{S}_3$ と正三角形の合同変換群 $\mathbf{C}_{3v}$（page1）を比べてみると、

$e:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $c_3:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $c_3^{-1}:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_1:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

この対応のもとで群表は一致するので、$\mathbf{S}_3$ と $\mathbf{C}_{3v}$ は同型である。

置換の中でも、特定の数の組 $(a_1\ a_2 \cdots\cdots a_n)$ を順繰りに動かす操作 $a_1 \to a_2 \to \cdots\cdots \to a_n \to a_1$ を巡回と呼び、

$\alpha = (a_1\ a_2 \cdots\cdots a_n)$ とあらわすことにする。　　たとえば、(2　3　5) は 2 → 3 → 5 → 2 といった具合

巡回の中でも、とくに 2 つの数の巡回 $(i\ \ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots i \cdots j \cdots n \\ 1 & 2 & 3 \cdots j \cdots i \cdots n \end{pmatrix}$ を互換という。

$(i\ \ j)$ の逆元は $(j\ \ i)$ である。

・置換は、いくつかの巡回の積であらわせる。

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (2\ \ 4\ \ 5)$　　n = 6 を明示したければ、(2　4　5)(1)(3)(6)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (2\ \ 4\ \ 5)(1\ \ 3)$

互いに共通の文字を含まない巡回の積で一意的にあらわせる。

共通の文字を含まない 2 つの巡回は可換である。

・巡回はいくつかの互換の積に分解できる。

$(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3) = (1\ \ 3)(1\ \ 4)(1\ \ 2)$　　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

・したがって、置換は互換の積としてあらわせる。

しかし、一意的ではない。

例えば上の巡回 $(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3) = (1\ \ 3)(1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)(2\ \ 3)$

ところが、互換の数が偶数か奇数かは、一意的に決まる。（偶置換、奇置換）　　補論 2-1　page17 参照

対称群 S_n の位数（元の数）n! のうち、半数が偶置換、半数が奇置換である。

対称群 S_n（n>1）の偶置換の集合 A_n は、S_n の不変部分群（正規部分群）である。

$\alpha_1, \alpha_2 \in A_n$ とすると、明らかに $\alpha_1\ \alpha_2 \in A_n$。ゆえに、$A_n$ は部分群を構成する。

さらに、$\alpha \in A_n$ ならば、任意の S_n の元 β に対して $\beta\ \alpha\ \beta^{-1} \in A_n$。したがって、$A_n$ は不変部分群である。

これらの議論から、S_n を剰余類分解すると、$S_n = A_n + A_n \cdot (1\ \ 2)$ が可能であることがわかる。この右辺第 2 項は奇置換の全体である。

偶置換だけからなる群 A_n を、交代群とよぶ。

例　$\mathbf{S}_2$ は恒等置換 (1) と互換 (1　2) のみからなる位数 2 の置換群で、$\mathbf{A}_2$ は単位元のみからなる。

$\mathbf{S}_3$ は位数 6 の群であるが、$\mathbf{A}_3$ は (1), (1　2　3)=(1　2)(2　3), $(1\ \ 2\ \ 3)^2$ の 3 元から構成される群で、巡回群 $\mathbf{C}_3$ に合同である。

ケーリーの定理

「位数 n の任意の群 G は、対称群 S_n（位数 n!）またはそのどれか部分群に同型である。」

このことは、対称群 S_n は有限群のあらゆる構造を含んでいることを保証する。

さらに、このことから次の重要な結論が導きだせる。

「位数 n で互いに同型でない群の種類の数は有限個に限られる。」（なぜなら、対称群 S_n に含まれる部分群は有限個しかないからである。）

ケーリーの定理の証明

群 G $= \{g_1, g_2, g_3, \cdots\cdots, g_n\}$ とする。いま G の元 a を 1 つ選んで G の各元に左から掛けて、$ag_1, ag_2, ag_3, \cdots\cdots, ag_n$ をつくる。

組み換え定理 （page3）により、これは互いに異なり、かつ G の元すべてを網羅する。

元 a に、この $g_1, g_2, g_3, \cdots\cdots, g_n$ から $ag_1, ag_2, ag_3, \cdots\cdots, ag_n$ への置換 π_a を対応させる。

$$a \rightarrow \pi_a = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots\cdots & g_n \\ ag_1 & ag_2 & \cdots\cdots & ag_n \end{pmatrix}$$

この対応によって、G が S_n の部分群に同型であることが示される。

π_b は、$\pi_b = \begin{pmatrix} ag_1 & ag_2 & \cdots\cdots & ag_n \\ b(ag_1) & b(ag_2) & \cdots\cdots & b(ag_n) \end{pmatrix}$ とあらわしても差支えないので、

$$\pi_b\pi_a = \begin{pmatrix} ag_1 & ag_2 & \cdots\cdots & ag_n \\ b(ag_1) & b(ag_2) & \cdots\cdots & b(ag_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots\cdots & g_n \\ ag_1 & ag_2 & \cdots\cdots & ag_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots\cdots & g_n \\ bag_1 & bag_2 & \cdots\cdots & bag_n \end{pmatrix} = \pi_{ba}$$

ならびに $\pi_{a^{-1}} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots\cdots & g_n \\ a^{-1}g_1 & a^{-1}g_2 & \cdots\cdots & a^{-1}g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag_1 & ag_2 & \cdots\cdots & ag_n \\ g_1 & g_2 & \cdots\cdots & g_n \end{pmatrix} = \pi_a^{-1}$

これで、群 G は、S_n（位数 n!）の部分群に同型であることが示された。

この G に同型な S_n の部分群（H_R とする）は、単位元 π_e を除けばどの記号 g_i も必ず他の記号に移す。

これは、π_a $(a \neq e)$ に対し、$a\,g_i \neq g_i$ だからである。

また、H_R に属する異なる π_1 と π_2 が、 1 つの記号 a をほかの同一記号、たとえば同じ b に移すこともない。異なる b と b' に移す。

なぜなら、$\pi_1 a = b$, $\pi_2 a = b$ だとすると、$\pi_1^{-1}\pi_2 \in H_R$ は $\pi_1^{-1}\pi_2 a = a$ となって a を不動にするので矛盾する。

このような性質を満たす置換を正規置換という。

こうして、単位元 π_e 以外の正規置換 π は、<u>すべての記号を他の記号に移す</u>。

また、正規置換 π を共通の記号を含まない巡回の積に分解すると、<u>すべて同じ長さの巡回の積になる</u>。

$$\pi = (a_1\, a_2 \cdots a_k)(b_1\, b_2 \cdots b_k)\cdots$$

たとえば、$\pi \in H_R$ が異なった長さの巡回の積 $\pi = (a_1 a_2 \dots a_j)(b_1 b_2 \dots b_k)$　$j < k$ に分解できたとすると、$(\pi)^j$ を考えたとき、$(\pi)^j \in H_R$ かつ $(\pi)^j \neq \pi_e$ のはずなのに、この $(\pi)^j$ は $a_1 a_2 \dots a_j$ を移動させない。正規置換であることに矛盾する。

対称群の共役類

S_n の置換 π （これは正規置換ではなく、一般の置換）を互いに同一文字を含まない巡回の積として表したとする。（置

換は、互いに共通の文字を含まない巡回の積で一意的にあらわせる。page9）

$\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{\lambda_1})(b_1 b_2 \cdots b_{\lambda_2})\cdots(c_1 c_2 \cdots c_{\lambda_n})$

ここに、$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0$、　$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = n$ としてもよい。

λ_i のいくつかは 0 となりうる。(0) = 1 とする。

このような数の組 $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ を、整数 n の分割 (partition) という。

ある分割 $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ に属する置換 π の一般の置換 μ に対する共役元 $\mu\pi\mu^{-1}$ は、

また同一の分割 $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ に属する元になる。

つまり、　$\mu\pi\mu^{-1} = (a'_1 a'_2 \cdots a'_{\lambda_1})(b'_1 b_2 \cdots b'_{\lambda_2})\cdots(c'_1 c'_2 \cdots c'_{\lambda_n})$　　補論 2-2 page18 参照

逆に、同じ分割をもつ置換 $\pi' = (a'_1 \cdots a'_{\lambda_1})(b'_1 \cdots b'_{\lambda_2})\cdots(c'_1 \cdots c'_{\lambda_n})$ があれば、

$\mu = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_{\lambda_1} & b_1 \cdots b_{\lambda_2} & \cdots \\ a'_1 \cdots a'_{\lambda_1} & b'_1 \cdots b'_{\lambda_2} & \cdots \end{pmatrix}$ によって $\pi' = \mu\pi\mu^{-1}$ となるから、<u>同じ分割をもつ置換は、互いに共役である</u>。

したがって、おのおのの分割は共役類を構成する。

重要な結論

対称群 S_n の共役類の個数は、$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0$、　$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = n$ を満たすゼロを含む正の整数解の個数、すなわち、分割 $[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ の数に等しい。

たとえば、置換群 S_3（位数 3!=6）の共役類の個数は、分割 [1 1 1]、[2 1 0]、[3 0 0] の 3 個となる。
実際、単位元 e のみで構成される類、巡回 (1 2)、(1 3)、(2 3) から構成される類、巡回 (1 2 3)、(2 1 3) から構成される類の 3 種である。

共役類の元の数

S_n の置換 π を互いに共通な文字を含まない巡回の積に分割するとき、

1 項巡回の個数を ν_1、2 項巡回の個数を ν_2、…、n 項巡回の個数を ν_n とする。

この巡回構造を、記号 $(\nu) \equiv (1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \cdots, n^{\nu_n})$ であらわすとしよう。

この置換の対象となる文字数（置換群の次数）は n であるから、$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \cdots + n\nu_n = n$

ここで、

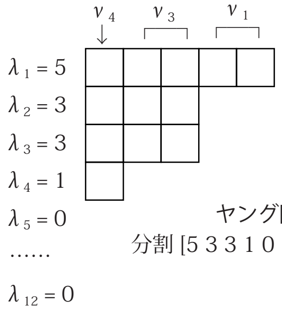
$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_n &= \lambda_1 \\ \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_n &= \lambda_2 \\ &\cdots\cdots \\ \nu_n &= \lambda_n \end{aligned}$$

とすると、

$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = n$

$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq 0$

これは、分割 $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ にほかならない。



ヤング図
分割 [5 3 3 1 0 …] = $[5\ 3^2\ 1]$

分割 $[\lambda]$ から逆に巡回構造 (ν) は

$$\nu_1 = \lambda_1 - \lambda_2,\ \nu_2 = \lambda_2 - \lambda_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ \nu_n = \lambda_n$$

で定められる。

以上から、分割 $[\lambda]$ は巡回構造 (ν) を一意的にさだめ、逆に (ν) は $[\lambda]$ を一意的に定める。

したがって、０または正の整数の巡回構造 (ν) の数は、共役類の数＝分割 $[\lambda]$ の数に等しい。

対称群 S_n の各共役類に含まれる元の数 $n(\nu)$ は、

$$n(\nu) = \frac{n!}{(\nu_1!)(2^{\nu_2}\ \nu_2!)(3^{\nu_3}\ \nu_3!)\ \cdots\cdots\ (n^{\nu_n}\ \nu_n!)}$$

まず n 個の記号を、1 巡回 ν_1 個、2 巡回 ν_2 個、……、p 巡回 ν_p 個、……に組み分けする。それぞれには $p\,\nu_p$ 個割り当てられることになるが、この方法の数 $C(\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n)$ は、

$$C(\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n) = n! \,/\, \prod_{p=1}^{n} (p\,\nu_p)!$$

さらにこの分割の後､p 巡回に割り当てられた $p\,\nu_p$ 個の記号を､p 個入る空の巡回箱（ν_p 個ある）に分配しなければならない。

$(○_1\ ○_2\ \cdots\cdots\ ○_p)(○_1\ ○_2\ \cdots\cdots\ ○_p)\cdots\cdots$　　この空の巡回箱 $(○_1\ ○_2\ \cdots\cdots\ ○_p)$ が ν_p 個ある。

この方法は $(p\,\nu_p)!$ 通りあるが、席を埋めてみたときこの箱の中の p 個の席を巡回的に並び変えても同じ巡回である。つまり p 回重複することになる。これが p 巡回につき ν_p 個あるから、p^{ν_p} 回の数え過ぎである。さらに、この ν_p 個の箱もどのように並び変えてもよいはずだから、これは $\nu_p!$ 回の数え過ぎである。

こうして、各 p について独立な巡回構造の数は $(p\,\nu_p)! \,/\, (p^{\nu_p}\,\nu_p!)$ である。

以上より、

$$n(\nu) = C(\nu) \prod_{p=1}^{n} [\,(p\,\nu_p)! \,/\, (p^{\nu_p}\,\nu_p!)\,] = n! \,/\, \prod_{p=1}^{n} (p^{\nu_p}\,\nu_p!)$$

3、ベクトル空間

n 次元のベクトル空間のある基底を $\{\mathbf{a}\} \equiv (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$ とし、

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ とする。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を、この基底に対する $\mathbf{x}$ の成分という。

$\mathbf{x}' = \hat{T}\mathbf{x}$　　$\hat{T}$ は変換演算子

$\hat{T}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\hat{T}\mathbf{x} + b\hat{T}\mathbf{y}$ が成り立つとき、$\hat{T}$ を線形演算子という。

このとき、$x_i' = \sum_j T_{ij}x_j$ と表せる。　≡ 成分は行列 T によって変換される。

略して、$\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$

$\det T \neq 0$（正則行列）　　$x_i' = \sum_j T_{ij}x_j$ に解があるための必要十分条件

つまり、逆行列が存在して $\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{x}'$ と表せる。

行列が正則であることの同値な条件
- $AB = BA = I$ なる n 次正方行列 B が存在する（逆行列の存在）
- $\det A \neq 0$
- A の階数は n である
- A の固有値はすべて 0 ではない

等々

基底をとりかえる

$\{\mathbf{a}\}$ とは別の基底 $\{\tilde{\mathbf{a}}\} \equiv (\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \cdots, \tilde{\mathbf{a}}_n)$ で表して、$\mathbf{x} = \tilde{x}_1\tilde{\mathbf{a}}_1 + \tilde{x}_2\tilde{\mathbf{a}}_2 + \cdots + \tilde{x}_n\tilde{\mathbf{a}}_n$ とする。

ただし、$\{\mathbf{a}\}$ と $\{\tilde{\mathbf{a}}\}$ は、正則な線形変換 $\tilde{\mathbf{a}}_i = \hat{U}\mathbf{a}_i = \sum_j \mathbf{a}_j U_{ji}$ または逆に $\mathbf{a}_i = \sum_j \tilde{\mathbf{a}}_j {U^{-1}}_{ji}$ によって関係づけられているとする。

$\mathbf{x} = \sum_i x_i\mathbf{a}_i$　　また、$\mathbf{x} = \sum_j \tilde{x}_j\tilde{\mathbf{a}}_j = \sum_{i,j} \mathbf{a}_i U_{ij}\tilde{x}_j$ でもあるから、

両者を比較して、$x_i = \sum_j U_{ij}\tilde{x}_j$

一方、$\mathbf{x}' = \hat{T}\mathbf{x} = \sum_{i,j} \mathbf{a}_j T_{ji}x_i = \sum_{i,j,k,l} \tilde{\mathbf{a}}_k {U^{-1}}_{kj}T_{ji}U_{il}\tilde{x}_l$　　また、$\mathbf{x}' = \sum_{k,l} \tilde{\mathbf{a}}_k\tilde{T}_{kl}\tilde{x}_l$ と書くことができるから、

両者を比較して、$\tilde{T}_{kl} = \sum_{j,i} {U^{-1}}_{kj}T_{ji}U_{il}$

すなわち、基底の変換によって、$\tilde{T} = U^{-1}TU$（行列表記）となる。

演算子の表現 T と $\tilde{T}$ が、この関係で結びついているときは、、単に基底ベクトルの取り方が異なるだけである。

この場合、T と $\tilde{T}$ は同値であるという。

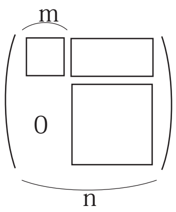
簡約（reduce）

n 次元のベクトル空間 V_n の部分空間を V_m（$m \leqq n$）とする。

V_m に属する任意のベクトル $\mathbf{V}$ に線形演算子 $\hat{A}$ を作用させて得られる $\hat{A}\mathbf{V}$ がやはり V_m に属するとき、V_m を $\hat{A}$ に関する不変部分空間という。

さて、基底のうち初めの m 個をその不変部分空間の中から選ぶと、

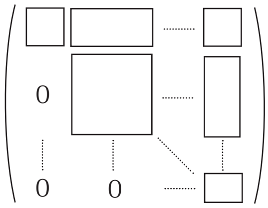
$\hat{A}$ の表現行列は、次の形になる。　　補論 3-1　page19



つまり、適当な基底ベクトルの変換 U を行うことによって、$U^{-1}AU$ が上の形になるとき、表現が簡約されたという。

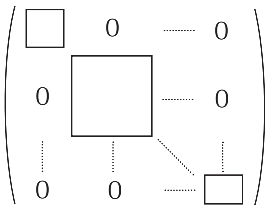
既約（irreducible）

簡約を次々にすすめていって、次のような形となったところで、もはやそれ以上簡約できなくなったとき、表現は既約分解されたという（対角ブロックがすべて既約になった）。



完約

完約とは、次のような形となったときである。



計量ベクトル空間

物理学などでは、２点間の距離とか絶対的な意味の大きさを備えた計量空間が重要となる。（これに対して、絶対的な大きさというものが入っていないものをアフィン・ベクトルと呼ぶ。）

この絶対的な意大きさを備えた計量空間では、正規直交基底とよばれる基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n$ が存在し、

この基底によってベクトル $\mathbf{v}$ を $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_1\mathbf{e}_2 + \cdots\cdots + v_n\mathbf{e}_n$ とあらわせる。

内積の定義

２つのベクトル $\mathbf{u}$、$\mathbf{v}$ の内積を

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + \cdots\cdots + u_n^* v_n$ によって定義する。（† は転置およびその成分の複素共軛　t＋＊）

$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})^*$

$(\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (A^\dagger \mathbf{u}, \mathbf{v})$　　$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A^\dagger \mathbf{v})$　　$\leftarrow (A\mathbf{u})^\dagger = \mathbf{u}^\dagger A^\dagger$

ベクトルの大きさ

$\mathbf{v}$ の大きさを $|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v},\mathbf{v})}$ で定義する。

固有値・固有ベクトル（行列表現での定義）

正方行列 A に対して、A$\mathbf{v}$= λ $\mathbf{v}$ を満たすスカラー λ を固有値、ゼロでないベクトル $\mathbf{v}$ を（固有値 λ に対応する）固有ベクトルと呼ぶ。

ユニタリ変換

これは、変換 $\hat{U}$ によって内積 ($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) が不変に保たれるような変換である。

$(\hat{U}\mathbf{u}, \hat{U}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$

行列要素とベクトル成分で実際に計算してみると、$\sum_{i=1}^{n} U_{ik}{}^{*}U_{il} = \delta_{kl}$ でなければならないことがわかる。

すなわち、$U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = 1$　　$U^{\dagger}$は行列 U の随伴行列 (U の転置およびその成分の複素共軛　U^{t*})

・行列 U の列、また行は、正規直交基底である。

・ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 である。

エルミート行列

$(\hat{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \hat{A}^{\dagger}\mathbf{v})$　　$\hat{A}^{\dagger}$を $\hat{A}$ の共役演算子という。

$(\hat{H}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \hat{H}\mathbf{v})$つまり $\hat{H}^{\dagger} = \hat{H}$（自己共役演算子）を満たすとき､演算子$\hat{H}$をエルミート演算子という。

随伴行列を使った行列表現では、$H^{\dagger} = H$ である。

エルミート行列の固有値は実数である。

【証明】

$H\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$（H はエルミート行列）として、

$(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda|\mathbf{x}|^2$

$(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})^* = (\mathbf{x}, H\mathbf{x})^* = (H^{\dagger}\mathbf{x}, \mathbf{x})^* = (H\mathbf{x}, \mathbf{x})^* = (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x})^* = \lambda^*(\mathbf{x}, \mathbf{x})^* = \lambda^*|\mathbf{x}|^2$

$|\mathbf{x}|^2 \neq 0$ より、$\lambda - \lambda^* = 0$　　∴ λ は実数

$H\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$（H はエルミート行列、$\lambda$ は実数）として、$(H - \lambda)\mathbf{v} = 0$ が解をもつための条件は、

$\det|H - \lambda E| = 0$ である。

エルミート行列はユニタリ行列で対角化できて（正規直交基底への変換　UHU^{-1}）、得られた対角行列の成分はすべて実数となる。これにより、エルミート行列 H の全ての固有値が実数であり、H が n 個の線型独立な固有ベクトルを持つことがわかる。（①、②、③参照）　補論 3-2 page19

---

①エルミートもしくはユニタリな変換は､ベクトル空間 V の不変部分空間 (page13) を S とすると､S を S 自身に、S の直交補空間 $S^{\perp}$を $S^{\perp}$自身にうつす。（直交補空間とは、その部分空間内のすべてのベクトルと直交するようなベクトル全体の成す集合を言い、直交補空間はそれ自身部分線型空間を成す。）

②エルミートあるいはユニタリ行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。

【証明】

$A\mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}$ 、$A\mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}$ とする。

$\lambda_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \lambda_2\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (A^{\dagger}\mathbf{u}, \mathbf{v})$

エルミートのとき（自己共役 / 固有値は実数）、上式 $= (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
ユニタリのとき、ユニタリ行列の固有値の絶対値は 1 だから、

$U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ とすると、$\lambda^*\lambda = 1$

$\mathbf{x} = \lambda U^{-1}\mathbf{x}$ より、$U^{-1}\mathbf{x} = \lambda^*\mathbf{x}$

上式 $= (A^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\lambda_1^*\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

いずれも、$\lambda_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ となって、$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$　直交する。

③エルミートもしくはユニタリ変換は、固有ベクトルの完全直交系をもつ。*

【説明】

$\det(A - \lambda E) = 0$ の 1 つの根 λ_1 に対して、

$(A - \lambda_1 E)\mathbf{x}_1 = 0$ は自明でない解 $\mathbf{x}_1$ をもつ。

$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$

したがって①、②より、A は $\mathbf{x}_1$ に直交する空間 $S^{\perp}_{n-1}$ をそれ自身にうつす。
そこで問題は、次元の 1 だけ下がった問題に帰着される。

このようにして次々に直交するベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n$ が得られ、

$A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$

$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$

が成りたつ。

この $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n$ を空間の基底にとれば、演算子 $\hat{A}$ の行列は対角行列であり、その行列要素は

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。

*　ベクトル $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ が完全系を構成するとは、この n 次元空間の任意のベクトル $\mathbf{v}$ が $\mathbf{e}_i$ の線形結合で表わせることをいう。

補論 1-1　page4

群の元を類別する方法

①群表の g_i の列に並ぶ元に左から g_i^{-1} を掛けて新しい表を作る。この表の各行に並ぶ元は同一の類に属する。これを類別表、または類表という。

ba（下の群表参照）に対して、$a^{-1}ba$ という操作をして表をつくり変えることになる。b の行に並ぶ元は、互いに共役となる。

②群表の単位元から始まる対角線に対して、対称な位置にある元は互いに同一類に属する。

対称な位置にある元は、ba と ab（下の群表参照）の関係にあるので、$b^{-1}(ba)\,b = ab$ となって互いに共役である。

どちらの方法でもよい。

例　$\mathbf{C}_{3v}$ の元の類別

群表（元 a と元 b の積 ba を表にしたもの）

$b \backslash a$	e	c_3	c_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	c_3	c_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
c_3	c_3	c_3^{-1}	e	σ_3	σ_1	σ_2
c_3^{-1}	c_3^{-1}	e	c_3	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	c_3	c_3^{-1}
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	c_3^{-1}	e	c_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	c_3	c_3^{-1}	e

← g_i 列

対角線

これから類別表を作ると、

	e	c_3	c_3^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3
	e	e	e	e	e	e
	c_3	c_3	c_3	c_3^{-1}	c_3^{-1}	c_3^{-1}
	c_3^{-1}	c_3^{-1}	c_3^{-1}	c_3	c_3	c_3
	σ_1	σ_3	σ_1	σ_1	σ_3	σ_2
	σ_2	σ_1	σ_2	σ_3	σ_2	σ_1
	σ_3	σ_2	σ_3	σ_2	σ_1	σ_3

$\mathbf{C}_{3v}$ は次のように類別される。

$\mathbf{C}_1$	$\mathbf{C}_2$	$\mathbf{C}_3$
e	$c_3,\ c_3^{-1}$	$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$

補論 1-2　page7

写像 $\bar{f}$ が準同型であることは、剰余類群（page6）と準同型写像の定義（page3）によって確かめられる。

剰余類群 G/K　　$G = Kg_1 + Kg_2 + Kg_3 + \cdots\cdots + Kg_m$　　$g_1 = e$

$$(Kg_i)(Kg_j) = Kg_ig_j$$

$$\bar{f}(Kg_i)\ \bar{f}(Kg_j) = f(g_i)f(g_j) = f(g_ig_j) = \bar{f}(Kg_ig_j) = \bar{f}(Kg_iKg_j)$$　準同型写像

同型であることを示すには、異なる剰余類 Kg_i、Kg_j が $\bar{f}$ によって G' の異なる元 $f(g_i)$、$f(g_j)$ に写像されることを示せばよい。

準同型写像 f　$f(e) = e'$、$f(g^{-1}) = (f(g))^{-1}$　（page3）

もし、$f(g_i) = f(g_j)$ だとすると、$f(g_ig_j^{-1}) = f(g_i)f(g_j^{-1}) = f(g_i)f(g_j)^{-1} = e'$ となって、$g_ig_j^{-1}$ が核 K の元となる。

これは g_i が剰余類 Kg_j に属することになって最初の設定と矛盾する。

補論 2-1　page9

いま、n 変数の関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ があったとして、f に対する置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots\cdots & p_n \end{pmatrix}$ の作用を

$$\sigma : f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \rightarrow f(x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n})$$　とする。

ようするに、σ による変数の置き換えであって、これを $(\sigma f)(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とかくことにする。

$(\sigma\ f)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{p_1}, x_{p_2}, \cdots, x_{p_n})$

ここで、$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を、交代式（差積）と呼ばれる以下の式にとる。

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n)$$
$$\times (x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\times (x_{n-1} - x_n)$$

これに、１つの互換 $(i\ \ j)$ を作用させてみる。すると、f は符号を変えるだけである。実際この作用によって上式の右辺の $(x_i - x_j)$ が符号を変え、他の積要素は全体で入れ替わるだけである。

$((i\ \ j)\ f)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\ f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

すなわち、この f に奇数回の互換を作用させると f は符号を変え、偶数回の互換を作用させると f はもとのままである。

さてここで、１つの置換 σ が奇数個の互換の積にでも、偶数個の互換の積にでも分解できたとする。すると、$\sigma\ f$ は一方では +f、他方では -f となって矛盾する。したがって、σf を互換の積であらわしたとき、その互換の数が偶数であるか奇数であるかは、分解の仕方に関係なく一意的に定まる。

「対称群 S_n の位数（元の数）n! のうち、半数が偶置換、半数が奇置換である」

すべての偶置換の集合を A_n とし、その任意の２つの元を α_1, α_2 とすると、$\alpha_1 \cdot (1\ \ 2)$ および $\alpha_2 \cdot (1\ \ 2)$ はともに奇置換である。$\alpha_1 \neq \alpha_2$ なら $\alpha_1 \cdot (1\ \ 2) \neq \alpha_2 \cdot (1\ \ 2)$ でもある。なぜなら、$\alpha_1 \cdot (1\ \ 2) = \alpha_2 \cdot (1\ \ 2)$ とすると、右から $(1\ \ 2)$ を掛けると $\alpha_1 = \alpha_2$ になって仮定に反する。

したがって、偶置換の個数≦奇置換の個数。

また逆に、任意の奇置換を β とすると、$\beta \cdot (1\ \ 2) \in A_n$。右から $(1\ \ 2)$ を掛けて $\beta \in A_n(1\ \ 2)$。

したがって、奇置換の個数≦偶置換の個数。

したがって、偶置換と奇置換の数は等しい。

補論 2-2　page11

$\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{\lambda_1})(b_1 b_2 \cdots b_{\lambda_2}) \cdots (c_1 c_2 \cdots c_{\lambda_n})$ から、

$\mu \pi \mu^{-1} = (a'_1 a'_2 \cdots a'_{\lambda_1})(b'_1 b_2 \cdots b'_{\lambda_2}) \cdots (c'_1 c'_2 \cdots c'_{\lambda_n})$ を示すには、

１つの巡回について、$\mu (a_1 \cdots a_{\lambda_1})\ \mu^{-1} = (a'_1 \cdots a'_{\lambda_1})$ を示せばよい。

なぜなら、$\mu \pi \mu^{-1} = \mu (a_1 \cdots a_{\lambda_1}) \mu^{-1} \mu (b_1 \cdots b_{\lambda_1}) \mu^{-1} \cdots \mu (c_1 \cdots c_{\lambda_1}) \mu^{-1}$ だからである。

ここで、$\pi = (1\ \ 2\ \ \cdots\cdots\ \ k) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k\text{-}1 & k & k\text{+}1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & k & 1 & k\text{+}1 & \cdots & n \end{pmatrix}}_{\text{巡回}}$ として、$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ とすると、

$$\mu \pi \mu^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k\text{-}1 & k & k\text{+}1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & k & 1 & k\text{+}1 & \cdots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} d_k & d_1 & \cdots & d_{k-1} & d_{k+1} & \cdots & d_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_k & d_{k+1} & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$
$$= (d_1\ \ d_2\ \cdots\ d_k)$$

すなわち、k 個の巡回の共役元は、k 個の巡回である。この計算で k+1 番目以降の列は、事実上関与していない。また、ここでは特別な巡回 (1　2　……　k) について計算を行ったが、任意の巡回についても同様な関係がなりたつ。したがって、分割 [λ_1, λ_2, ⋯ , λ_n] に属する元の共役は、同一の分割をもつ。

補論 3-1　page13

n 次元のベクトル空間 V_n があって、その線形演算子 $\hat{A}$ に関する不変部分空間を V_m（$m \leqq n$）とする。

このとき、V_m に属する任意のベクトル $\mathbf{v}$ に $\hat{A}$ を作用させて得られる $\hat{A}\mathbf{v}$ は、V_m に属することになる。

$$\mathbf{v} \in V_m \ \rightarrow \ \hat{A}\,\mathbf{v} \in V_m \qquad ①$$

不変部分空間 V_m の基底ベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_m$ とすると、これによって $\mathbf{v} \in V_m$ は

$$\mathbf{v} \xrightarrow{\text{同型写像}\varphi} \varphi(\mathbf{v}) = (v_1, v_2, \cdots, v_m, 0, \cdots, 0)^T \qquad ② \qquad \mathbf{v} = v_1\mathbf{v}_1 + \cdots + v_m\mathbf{v}_m + 0 + \cdots + 0 \qquad \mathbf{v} \in V_m$$

と表わせる。（V_n 空間で議論している。φ はその基底 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ に基づく同型写像。この基底のうち初めの m 個は、不変部分空間 V_m の基底から選んでいる。）

簡単のため、$(v_1, v2, \cdots, v_m)^T = \mathbf{w}$ とおく。　　$(v_1, v_2, \cdots, v_m, 0, \cdots, 0)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$\hat{A}\,\mathbf{v} \in V_m$ であるから、

$$\varphi(\hat{A}\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\mathbf{w} \\ A_{21}\mathbf{w} \end{bmatrix} \in \varphi(V_m) \qquad ③$$

A_{11} は m×m、A_{22} は (n−m)×(n−m) 行列　ちなみに、A_{22} は V_n/V_m の線型変換の V_n/V_m の基底に関する表現行列になる。

②より、$A_{21} = 0$　（$\mathbf{w}$ は任意なので）

つまり、$\hat{A}$ の表現行列は $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ の形になる。もちろん、ここで示した基底の取り方による表現ということになる。

補論 3-2　page15

エルミート行列はユニタリ行列で対角化できる。

エルミート行列 H の 2 つの異なる固有値 λ_i, λ_j が得られたとき、それぞれの固有ベクトル $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{x}_j$ は直交して、$\mathbf{x}_i \bullet \mathbf{x}_j = 0$ となる。

ここで、n 次のエルミート行列 H が異なる n 個の固有値 λ_1, λ_2, ⋯, λ_n をもつものとする。そして、それぞれに対応した、大きさを 1 にそろえた固有ベクトルを $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ⋯, $\mathbf{u}_n$ とおくと、固有方程式は、

$$H\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1,\ H\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2,\ \cdots,\ H\mathbf{u}_n = \lambda_n\mathbf{u}_n$$

となる。

これらを 1 つの方程式にまとめると、

$$H[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] = [\lambda_1\mathbf{u}_1\ \lambda_2\mathbf{u}_2\ \cdots\ \lambda_n\mathbf{u}_n] = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表せる。

ここで $U = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \cdots\ \mathbf{u}_n]$ は、ユニタリ行列（$U^\dagger U = UU^\dagger = 1$）に他ならない。

つまり、

$$U^{-1}HU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$